

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ НЕФТЕГАЗОВОЙ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ
ИМ. А. А. ТРОФИМУКА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

На правах рукописи

ВИШНЕВСКИЙ Дмитрий Михайлович

**КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ АЛГОРИТМ
МОДЕЛИРОВАНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ
В АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕДАХ**

Специальность 1.6.9 - геофизика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Лисица Вадим Викторович,
доктор физ.-мат. наук

НОВОСИБИРСК
2022

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	5
Глава 1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР ИЗВЕСТНЫХ РЕШЕНИЙ, ИХ ДОСТОИНСТВА И НЕДОСТАТКИ	12
Глава 2. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ РАСЧЕТА СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕДАХ	21
2.1 Постановка задачи	21
2.2 Конечно-разностные схемы на сдвинутых сетках для аппроксимации системы уравнений упругости	24
2.2.1 Схема «на сдвинутых сетках» для изотропной среды	24
2.2.2 Схема «на повернутых сетках» для анизотропной среды	32
2.2.3 «Схема Лебедева» для анизотропной среды	37
2.3 Сравнительный анализ вычислительной эффективности конечно-разностных схем на частично разнесенных сетках	41
2.3.1 Условие устойчивости схемы Лебедева	42
2.3.2 Численная дисперсия схемы Лебедева	46
2.3.3 Условие устойчивости схемы на повернутых сетках	49
2.3.4 Численная дисперсия схемы на повернутых сетках	51
2.3.5 Сравнительный анализ вычислительной эффективности в трехмерном случае	52
2.3.6 Сравнительный анализ вычислительной эффективности в двумерном случае	56

2.4	Нефизичные решения конечно-разностных уравнений	
	схемы Лебедева и схемы на повернутых сетках	59
2.4.1	Нефизичные решения системы уравнений схемы Лебедева . .	59
2.4.2	Нефизичные решения системы уравнений	
	схемы на повернутых сетках	65
2.5	Слабоотражающие граничные условия	
	для ограничения целевой области	71

Глава 3. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА,

ЕГО ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

И ПРИМЕНЕНИЕ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ 77

3.1	Разработка алгоритма и его программная реализация	77
3.1.1	Декомпозиция расчетной области	78
3.1.2	Программная реализация алгоритма	81
3.1.3	Расчет волновых полей для однородной анизотропной среды .	85
3.2	Численное исследование сходимости конечно-разностных схем	
	на сдвинутых сетках в средах с контрастными границами	90
3.2.1	Вложенные сетки и описание численного эксперимента	93
3.2.2	Сходимость конечно-разностных решений для однородной	
	среды	95
3.2.3	Сходимость конечно-разностных решений	
	для среды с горизонтальной границей	98
3.2.4	Сходимость конечно-разностных решений	
	для среды с наклонной прямолинейной границей	103
3.2.5	Сходимость конечно-разностных решений в среде	
	сложного строения с негладкими границами разрыва	
	коэффициентов уравнений	109
3.3	Численное моделирование волновых полей	
	в горизонтально-слоистых анизотропных средах	116
3.3.1	Расчет волновых полей для горизонтально-слоистой среды	
	с вертикально ориентированной трещиноватостью	117
3.3.2	Расчет волновых полей для слоистой модели	
	Юрубчено-Тохомской зоны нефтегазонакопления	133

3.4	Полномасштабное численное моделирование волновых полей в существенно трехмерных средах	144
3.4.1	Расчет волновых полей для доюрского комплекса Томской области	145
ЗАКЛЮЧЕНИЕ		149
ЛИТЕРАТУРА		151

Введение

Объект исследования — конечно-разностный метод решения прямой задачи сейсмологии на предмет развития его теоретической и алгоритмической составляющих для увеличения вычислительной эффективности алгоритмов расчета сейсмических волновых полей в трехмерных анизотропных средах на вычислительных системах с параллельной архитектурой.

Актуальность

Как известно, численное моделирование сейсмических волновых полей — важный исследовательский инструмент современной геофизики. Оно предшествует полевым физическим экспериментам, дополняет их и частично заменяет, когда выполнение полевых экспериментов затруднено или невозможно.

С появлением вычислительных систем с параллельной архитектурой открылась принципиальная возможность перейти от двумерных к более реалистичным трехмерным сейсмогеологическим средам при расчетах сейсмических волновых полей. В связи с этим приобретают актуальность развитие численных методов решения таких задач и разработка на их основе алгоритмов, ориентированных на параллельные вычисления.

Одновременно с этим углубляется понимание физики распространения сейсмических волн в реальных горных породах, и требуется адаптация соответствующих численных методов, в частности, учитывающих анизотропию скоростей распространения волн. Например, учет анизотропии важен при моделировании трещиноватых резервуаров. Ориентированная трещиноватость горной породы приводит и к её сейсмической анизотропии, и к изменению флюидопроницаемости в разных направлениях, которые в результате связаны между собой. Следовательно, знание параметров анизотропии необходимо для определения флюидопроницаемости при проектировании добывающих скважин большей эффективности.

Тогда при программной реализации алгоритмов моделирования сейсмиче-

ских волновых полей и практических расчетах время вычислений и объем вычислительных ресурсов существенно увеличиваются следующими факторами: трехмерностью среды, анизотропией среды и необходимостью полномасштабных численных экспериментов. Поэтому особую актуальность приобретают увеличение вычислительной эффективности используемых численных методов и алгоритмов на их основе.

Цель исследования — развитие конечно-разностных алгоритмов решения прямой задачи сейсмологии, повышение вычислительной эффективности ее решения для трехмерной анизотропной упругой среды за счет использования схемы на основе сетки Лебедева, соответствующего алгоритма и его программной реализации для вычислительных систем с распределенной памятью.

Научные задачи

1. На основе сетки Лебедева разработать конечно-разностную схему для численного решения прямой задачи сейсмологии в трехмерной анизотропной среде.
2. На основе схемы разработать алгоритм численного решения прямой задачи сейсмологии и реализовать его в научно-исследовательской версии программного обеспечения, ориентированного на параллельные вычисления.

Основные этапы исследований

1. На основе конечно-разностного метода с использованием сетки Лебедева [Лебедев, 1964] разработать конечно-разностную схему для численного решения системы уравнений упругости в трехмерном пространстве в случае анизотропии среды.
2. Путем сравнительного анализа численной дисперсии конечно-разностных схем определить вычислительную эффективность разработанной схемы относительно известной из публикаций схемы на повернутых сетках [Saenger et al., 2000].
3. С помощью метода дифференциального приближения показать, что относительно аппроксимируемой системы дифференциальных уравнений разработанная схема допускает большее число независимых решений, часть из которых являются нефизическими. Найти способ подавления соответствующих нефизических решений.
4. На основе разработанной конечно-разностной схемы создать алгоритм численного решения прямой задачи сейсмологии с использованием слабоотражающих

граничных слоев [Berenger, 1994] и декомпозиции области.

5. Реализовать алгоритм в виде научной версии программного обеспечения для параллельных суперкомпьютеров, верифицировать корректность работы алгоритма и программного обеспечения численными экспериментами для однородной анизотропной среды.

6. Исследовать скорость сходимости разработанной и других известных схем на основе численных решений, полученных при помощи реализующего разработанный алгоритм программного обеспечения.

7. Интегрировать численное моделирование волновых полей при помощи разработанного алгоритма в практические геофизические исследования.

Научные методы исследования, программное обеспечение

Высокая степень достоверности полученных научных результатов определяется использованием следующих современных математических теорий и методов:

- теория упругости, а именно динамическая линейная система уравнений в анизотропной постановке в качестве математической модели распространения упругих сейсмических волн;

- метод конечных разностей для численного решения начально-краевой задачи для системы уравнений упругости;

- теория уравнений в частных производных и теория конечно-разностных уравнений для сравнительного анализа численной дисперсии конечно-разностных схем и определения их относительной вычислительной эффективности;

- метод дифференциального приближения конечно-разностного уравнения для устранения нефизичных решений, допускаемых конечно-разностными схемами;

- прием PML (Perfectly Matched Layer — абсолютно согласованный слой) к построению слабоотражающих слоев для гиперболической системы дифференциальных уравнений;

- теория распространения волн в упругих анизотропных средах при верификации полученных численных решений сопоставлением конечно-разностных волновых фронтов с полученными аналитически.

Для создания научно-исследовательской версии программной реализации разработанного алгоритма для параллельных вычислительных систем использу-

ются:

- язык программирования C/C++;
- метод пространственной декомпозиции расчетной области;
- интерфейс передачи сообщений MPI (англ. «Message Passing Interface»)

для организации передачи информации между параллельными вычислительными потоками.

Защищаемые научные результаты

1. Разработанная, теоретически и численно исследованная конечно-разностная схема на основе сетки Лебедева для решения прямой задачи сейсмологии в трехмерной анизотропной среде.

2. Разработанный по схеме и реализованный в виде научно-исследовательской версии программного обеспечения алгоритм для расчета волновых полей в прикладных задачах сейсмологии.

Научная новизна

С использованием конечно-разностной сетки Лебедева разработана и теоретически обоснована конечно-разностная схема для динамической системы уравнений теории упругости в трехмерной анизотропной среде. Методом дифференциального приближения показано существование у разработанной схемы более широкого набора независимых решений (плоских волн), часть из которых являются нефизическими; разработан способ подавления нефизических решений путем аппроксимации начальных условий.

С использованием слабоотражающих слоев и декомпозиции вычислительной области на основе схемы разработан алгоритм, ориентированный на параллельные вычислительные системы. С помощью численных экспериментов на сетках с уменьшающимися шагами подтвержден первый порядок сходимости схемы на репрезентативном наборе моделей.

Личный вклад

Для расчета сейсмических волновых полей в трехмерной анизотропной среде разработана новая конечно-разностная схема (совместно с В.В. Лисицей): построены формулы для коэффициентов схемы, выведено условие устойчивости, исследована численная дисперсия и нефизические решения.

На основе схемы разработан и реализован в виде научно-исследовательской

версии программного обеспечения алгоритм расчета волновых полей. Выполнены численные эксперименты для исследования сходимости разработанной схемы и ее аналогов. Рассчитаны волновые поля для двух плоскостойких трехмерных моделей анизотропных сред. Выполнено полномасштабное трехмерное численное моделирование для изотропной модели доюрского комплекса Томской области.

Лично участвовал в подготовке публикаций по теме диссертации.

Теоретическая и практическая значимость результатов

С помощью современных достижений теории разностных схем разработан новый конечно-разностный алгоритм численного решения прямой задачи сейсмоки для трехмерной анизотропной среды, обладающий меньшими, чем известные аналоги, требованиями к вычислительным ресурсам при одинаковой точности численного решения. На его основе создан ориентированный на параллельные вычислительные системы научно-исследовательский вариант программного обеспечения.

Алгоритм позволяет изучать проявление анизотропии среды в сейсмоакустических полях, которое может быть связано, например, с сонаправленной трещиноватостью некоторых пластов геологических пород. Это делает возможным появление новых подходов к определению свойств среды сейсмическими методами.

С помощью созданного на основе разработанного алгоритма параллельного программного обеспечения рассчитаны сейсмические волновые поля, которые использованы специалистами ИНГГ СО РАН С.Б. Горшкалевым, В.В. Карстеном, специалистами «Тюменского нефтяного научного центра» О.А. Литтау, А.В. Новокрещинным и др. для разработки методики компенсации расщепления поперечных волн в верхней части разреза, в том числе защищена кандидатская диссертация Е.В. Афониной по теме «Методика обработки данных 2D-3C отраженных PS-волн для компенсации их расщепления в азимутально-анизотропных слоях, залегающих выше целевого интервала исследований».

Также с помощью созданного программного обеспечения численно исследована сходимость решений для разработанной и других известных конечно-разностных схем для моделей среды с разными типами границ разрывов параметров.

Апробация работы и публикации

Научные результаты работы известны научной общественности. Они докладывались, обсуждались и одобрены специалистами на 20 научных международных конференциях в России и за рубежом:

- международная конференция «ММГ-2008», Новосибирск, 2008;
- международная конференция и выставка EAGE, Амстердам, Нидерланды, 2009; Барселона, Испания, 2010; Санкт-Петербург, 2016, 2018, 2020;
- международный научный конгресс «ГЕО-Сибирь», Новосибирск, 2009, 2015;
- международная конференция «KazGeo 2010», Алматы, Казахстан, 2010;
- генеральная ассамблея IUGG, Мельбурн, Австралия, 2011;
- международная конференция «Waves 2011», Ванкувер, США, 2011;
- всероссийская научная конференция «Сейсмические исследования земной коры», Новосибирск, 2011;
- вторая конференция и выставка «Суперкомпьютерные технологии в нефтегазовой отрасли», Москва, 2011;
- международный семинар «PARA 2012», Хельсинки, Финляндия, 2012;
- всероссийская конференция «Геофизические методы исследования земной коры», посвященная 100-летию со дня рожд. акад. Н.Н. Пузырева, Новосибирск, 2014;
- международная конференция AAPG «Fractured reservoirs», Сицилия, Италия, 2015;
- 5-я научно-практическая конференция «Тюмень 2017», Тюмень, 2017;
- научно-поисковый геологический семинар EAGE «ProGREss 2019», Сочи, 2019;
- 21-я конференция по вопросам геологоразведки и разработки месторождений нефти и газа «Геомодель-2019», Геленджик, 2019;
- 11-я международная научная конференция-школа «Theory and Computational Methods for Inverse and Ill-posed Problems», Новосибирск, 2021.

Научные результаты опубликованы в 7 статьях в научных журналах из списка ВАК:

- Geophysical Prospecting, 2010;
- Numerical Analysis and Applications, 2011;

- Сибирский журнал вычислительной математики, 2011;
- Geophysics, 2014;
- Технологии сейсморазведки, две статьи в 2016;
- PROнефть, 2021.

Получены 2 свидетельства о регистрации программного обеспечения.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы из 110 наименований. Работа содержит 164 страниц основного текста и 38 рисунков.

Благодарности

Диссертация выполнена в лаборатории вычислительной физики горных пород Института нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН.

Автор выражает искреннюю признательность д.ф.-м.н., профессору В.А. Чеверде и научному руководителю д.ф.-м.н. В.В. Лисице, на основе результатов длительной совместной работы с которыми написана эта диссертация.

Автор выражает благодарность своим коллегам из разных научных институтов в разное время принимавшим активное участие в обсуждении данной работы, в особенности д.г.-м.н. В.Д. Суворову, к.ф.-м.н. В.И. Костину, д.ф.-м.н. М.И. Протасову, д.ф.-м.н. Г.В. Решетовой и к.ф.-м.н. В.Г. Хайдукову. Отдельно хочется поблагодарить к.т.н. С.Б. Горшкалева и н.с. В.В. Карстена за геофизический взгляд на решаемые задачи, который значительно отличается от присущего автору математического.

Также хочется отметить, что переход от численного моделирования изотропных упругих сред к анизотропным для автора и его коллег внутри института был вдохновлен академиком С.В. Гольдиным.

Автор выражает особую благодарность В.И. Самойловой за методические рекомендации при подготовке диссертации и Т.С. Хачковой за помощь в верстке и оформлении работы.

Глава 1

Аналитический обзор известных решений, их достоинства и недостатки

Сейсмической анизотропией называют зависимость скоростей сейсмических волн от направления их распространения [Кузнецов и др., 2006]. Анизотропия скоростей является следствием анизотропии геологических свойств среды. Ее существование связано с ее упорядоченностью в каком-то направлении, приводящей к различию скоростей сейсмических волн, распространяющихся сонаправленно и поперек. Выделяются следующие факторы сейсмической анизотропии [Кашубин, 2001; Гольдин, 2008].

Первый — напряженное состояние среды. Тектонические или гравитационные негидростатические напряжения в горной породе приводят к анизотропии распространения сейсмических волн в среде, являющейся изотропной в ненагруженном состоянии [Костров, Никитин, 1968].

Второй — преобладание в породе соориентированных кристаллов минерала с анизотропными свойствами. Большинство минералов обладают собственной анизотропией, но хаотичность распределения их кристаллических зерен в породе приводит к изотропности упругих параметров породы в целом. Если порода состоит из кристаллов, большая часть которых имеет преимущественную ориентацию, — это приводит к общей анизотропии упругих свойств [Кашубин, 2001].

Третий — тонкослоистое строение среды. Квазипериодическое чередование маломощных по отношению к длине сейсмических волн слоев с различными физическими свойствами — каждый из слоев по отдельности может быть изотропным, но в совокупности массив пород будет анизотропным [Backus, 1962; Puzyrev et al., 1984; Schoenberg, Muir, 1989]. Например, это может быть связано с периодичным осадконакоплением.

Четвертый — упорядоченные неоднородности среды. Микровключения, ориентация которых не хаотична, обладают упорядоченностью в каком-то направлении [Бавакин, Салганик, 1975; Hudson, 1981; Schoenberg, Sayers, 1995; Hudson et al.,

2001]. Например, трещины с преобладающим направлением их распространения.

В третьем и четвертом случаях сейсмическая анизотропия проявляется только на надпородном уровне [Гольдин, 2008]: порода может состоять из изотропных составляющих и на коротких волнах влиять на распространение сейсмических волн как сложноустроенное изотропное тело, но для достаточно длинных волн проявлять осредненные анизотропные свойства. Такую особенность принято называть квазианизотропией. В связи с этим при численном моделировании сейсмической анизотропии необходимо понимать природу ее возникновения и масштабы.

Также анизотропия, возникающая вследствие двух последних причин, существенно проявляется в сейсморазведке. Наземная сейсморазведка имеет дело с глубинами порядка первых километров, сложенных осадочными породами, в которых проявляется анизотропия, связанная с тонкослоистым строением среды. А из анализа сейсмического поля, когда оно обладает анизотропией, вызванной трещиноватостью, можно сделать вывод о направлении и количестве трещин, что востребовано при разведке и добыче месторождений углеводородов, так как проницаемость среды в направлении трещин значительно повышается.

Еще до создания компьютеров с производительностью, достаточной для численного моделирования распространения упругих волн, эта задача решалась аналитически. Решение удалось получить только для некоторых простых моделей среды, например, для однородной среды решение задачи Коши для волнового уравнения записывается через интеграл [Владимиров, 1981]. Получены результаты и для некоторых более сложных постановок. В осесимметричной постановке для заполненной жидкостью скважины в однородной среде проанализирована структура волнового поля и получены дисперсионные соотношения, описывающие так называемые «трубные волны» [Biot, 1952]. В работе представителей советской ленинградской школы методом асимптотического анализа представлены результаты для осесимметричных сред, описывающих скважину с источником, нарушающим осесимметричность волнового поля [Крауклис, Крауклис, 1976]. Однако с использованием аналитических методов не удастся приблизиться к решению задачи распространения упругих волн в более сложных трехмерных неоднородных средах, полнее описывающих реальные геологические объекты.

В 70-х годах XX века получают распространение аналитически-

вычислительные методы, основанные на переходе в дуальное пространство при помощи интегральных преобразований типа преобразования Фурье по пространственным координатам. При этом дву- или трехмерная задача сводится к серии независимых одномерных, которые решаются конечно-разностным методом [Алексеев, Михайленко, 1977; Alekseev, Mikhailenko, 1990]. Для решения одномерной задачи требуется значительно меньше вычислительных ресурсов, и алгоритм реализуется на современных для того времени компьютерах типа БЭСМ-6. Ограничением метода является требование на возможность перехода к дуальному пространству — зависимость параметров среды только от одной переменной.

Также получают распространение псевдоспектральные методы решения, основанные на аппроксимации входящих в уравнения производных разложением их в ряды по базисным функциям, бесконечное число раз дифференцируемым в расчетной области, например по полиномам Чебышева [Kosloff, Baysal, 1982], решение в лучевом приближении [Cerveny, 1972; Cerveny et al., 1977] и др.

Поскольку вычислительная производительность компьютеров постоянно растет, появилась фактическая возможность решать задачу распространения сейсмических волн в полной постановке для трехмерной среды, в том числе анизотропной. Известно большое количество численных методов и основанных на них алгоритмов решения этой задачи. В частности, следует выделить метод конечных разностей [Alford et al., 1974; Virieux, 1986; Saenger et al., 2000], метод конечных элементов [Becache et al., 2002; Zhang, Vershuur, 2002], метод спектральных элементов [Komatitsch, Vilotte, 1998; Tromp et al., 2008], метод конечных объемов [Zhang, 1997; Zhang, 1999; Calhoun et al., 2008], сеточно-характеристический метод [Квасов и др., 2010; Левянт и др., 2011; Левянт и др., 2012; Садовский, Садовская, 2014], разрывный метод Галеркина [Hu et al., 1999; Monk, Richter, 2005; Kaser, Dumbser, 2006; Etienne et al., 2010].

Основными преимуществами применения конечно-разностного метода являются простота построения алгоритма и его программной реализации, меньшие относительно других методов требования к вычислительным ресурсам на регулярной сетке или ее аналоге, возможность аппроксимировать среды произвольной геометрической сложности с достаточной для сейсмического моделирования точностью

[Moczó et al., 2002; Virieux et al., 2011; Vishnevsky et al., 2014]. Алгоритмы легко распараллеливаются методом декомпозиции расчетной области [Kostin et al., 2013; Глинский и др., 2015a, Глинский и др., 2015b]. К недостаткам конечно-разностного метода можно отнести плохую аппроксимацию высококонтрастных границ среды, не проходящих по линиям сетки, особенно криволинейной свободной поверхности, и сложность построения нерегулярных сеток.

В 70-80-е годы XX века публикуются первые работы, положившие начало современному конечно-разностному моделированию в геофизике для двумерной изотропной среды. Система уравнений динамической теории упругости, описывающая распространение сейсмических волн, может быть записана в нескольких эквивалентных формулировках, для численного решения которых строятся разные конечно-разностные схемы. Наиболее используемыми являются формулировка уравнений упругости в виде системы в частных производных второго порядка в смещениях и в виде системы первого порядка в скоростях (скоростях смещений) и напряжениях. Для численного решения первой используются конечно-разностные схемы типа «крест» («leap-frog» — в англоязычной литературе) [Kelly et al., 1976], а для второй — схемы «на сдвинутых сетках» («staggered grid» — в англоязычной литературе) [Virieux, 1986; Levander, 1988]. Выбор одной из эквивалентных формулировок системы дифференциальных уравнений влияет на количество переменных, которыми описывается состояние системы, для формулировки в смещениях оно меньше. Соответственно меньше и требования к компьютерной памяти, необходимой для практической реализации алгоритма. Однако для уравнений, записанных в скоростях-напряжениях, построены эффективные слабоотражающие граничные условия для ограничения вычислительной области, достаточно эффективного аналога которых для уравнений в смещениях пока не известно. Вследствие этого для численного решения в настоящее время в основном используется постановка в скоростях-напряжениях.

Для численного решения системы упругости, записанной в скоростях-напряжениях, широко применяются так называемые схемы «на сдвинутых сетках» («staggered grid» — в англоязычной литературе). Идея этого подхода проста: различные компоненты скоростей-смещений и напряжений определяются на сдвинутых друг относительно друга сетках так, что все входящие в систему урав-

нения удастся аппроксимировать центральными разностями. Таким образом порядок аппроксимации схемы повышается до второго. Сдвинутые сетки используются для построения конечно-разностной схемы для уравнений электромагнетизма [Yee, 1966], адаптируются для конечно-разностного решения системы уравнений упругости для изотропной среды [Virieux, 1984; Virieux, 1986]. Порядок аппроксимации схемы на сдвинутых сетках по пространству можно увеличить до четвертого [Levander, 1988] или выше. Применение схем на сдвинутых сетках для трехмерной среды начинается с 1990-х [Yomogida, Etgen, 1993; Graves, 1996; Moczo et al., 2002]. Конечно-разностный подход, использующий сдвинутые сетки, широко применяется в настоящее время.

Непосредственное применение конечно-разностной сетки схемы на сдвинутых сетках [Virieux, 1986] для построения конечно-разностной схемы для анизотропной среды приводит к необходимости интерполяции части входящих в уравнения переменных, что снижает точность численного решения при том же шаге дискретизации [Igel et al., 1995]. Для преодоления этого недостатка предложен иной способ построения сдвинутых сеток [Saenger et al., 2000], позволяющий аппроксимировать все входящие в уравнения производные при помощи центральных разностей. Новая сетка в случае двумерной среды может трактоваться как сетка схемы на сдвинутых сетках, повернутая на 45° , поэтому эту схему называют «схемой на повернутых сетках» («rotated staggered grid» — в англоязычной литературе). Нужно отметить, что схема на сдвинутых сетках все же позволяет моделировать волновые поля для сред с орторомбической анизотропией с осями, совпадающими с осями координат, без потери вычислительной эффективности.

Известен другой способ построения сдвинутых сеток, позволяющий аппроксимировать производные уравнений системы упругости центральными разностями. Эти сетки введены В. И. Лебедевым для построения разностных аналогов дифференциальных операторов задач математической физики [Лебедев, 1964], использованы для построения конечно-разностной схемы для уравнения электромагнетизма [Davydycheva et al., 2003] и для системы уравнений упругости в трехмерной анизотропной среде [Lisitsa, Vishnevskiy, 2010]. Конечно-разностная схема, основанная на введенных В. И. Лебедевым сдвинутых сетках, получила название «схема Лебедева» («fully-staggered grid» — в англоязычной литературе).

В дифференциальной постановке задача распространения упругих сейсмических волн ставится обычно как задача Коши для бесконечного пространства или полупространства. При этом целевой областью является некоторая ограниченная подобласть бесконечного пространства, расположенная вблизи источника сейсмических сигналов, а решение вне целевой области интереса не представляет. Как правило, модель среды строится таким образом, что уходящие из целевой области наружу волны не дают отражений, возвращающихся обратно в целевую область.

Но для программной реализации конечно-разностной постановки задачи расчетную область необходимо ограничить. Для этого исходная дифференциальная задача переформулируется как начально-краевая задача для некоторой конечной области, включающей целевую подобласть или совпадающей с ней. На границе этой области ставятся любые краевые условия, обеспечивающие корректность, например, условия Дирихле. При этом уходящие из целевой подобласти волны начинают отражаться от границ вычислительной области внутрь, что значительно искажает общую волновую картину. Отсюда возникает задача построения неотражающих краевых условий — условий на границе, не дающих отражения внутрь области, или слабоотражающих краевых условий, для которых отраженная внутрь от границы вычислительной области волна относительно мала. Попытка обойтись без построения неотражающих условий — отодвинуть границы вычислительной области достаточно далеко, чтобы отраженные от этой границы волны не успевали вернуться в целевую область — приводит к абсолютно неприемлемым требованиям на вычислительные ресурсы.

Большая часть известных работ по построению неотражающих граничных условий основывается на двух подходах. Первый — формулирование неотражающих граничных условий на границе расчетной области для системы второго порядка в смещениях. Для волнового уравнения на границе области строится нелокальный псевдодифференциальный оператор с требуемыми свойствами, и задача сводится к его аппроксимации дифференциальным оператором, который, в свою очередь, можно аппроксимировать конечно-разностным [Lindman, 1975; Engquist, Majda, 1977; Higdon, 1987]. В англоязычной литературе этот подход получает название ABC (сокращение от «Absorbing Boundary Conditions» — поглощающие граничные условия). Из научных публикаций известны [Collino et al., 1993] граничные

условия ABC произвольно высокого порядка аппроксимации. Для системы уравнений упругости, записанной в смещениях, также сформулированы условия ABC [Михайленко, Соболева, 1998].

Второй подход — построение слабоотражающих граничных условий для системы уравнений упругости в скоростях–напряжениях. Вычислительная область окружается слоем, в котором дифференциальные уравнения изменяются так, что волны в этом слое гаснут. Это достигается добавлением в уравнения младших членов («Sponge Layer» — в англоязычной литературе) [Kosloff, Kosloff, 1986] или конструированием специальных уравнений [Berenger, 1994]. За вторым способом в англоязычной литературе закрепилось название «Perfectly Matched Layers» (или «идеально согласованный слой»), сокращенно PML. Это сокращение стало общепотребительным названием всего подхода. Первоначально условия PML сформулированы в приложении к электромагнетизму, но с математической точки зрения применимы к любой линейной системе дифференциальных уравнений первого порядка, т.е. и к динамической системе уравнений теории упругости, описывающей распространение сейсмических волн [Chew, Liu, 1996; Collono, Tsogka, 2001].

Оба подхода в конечно-разностной постановке не поглощают уходящие из целевой области волны полностью, а дают относительно небольшие отраженные обратно в целевую область. Поэтому более точным их названием является «слабоотражающие» граничные условия.

Преимуществами слабоотражающих граничных условий ABC являются относительно малые требования к дополнительным вычислительным ресурсам, необходимым для реализации, и локальность — условия ставятся только на границе области. Недостатки — зависимость амплитуды отраженной волны от угла падения (для условий высокого порядка допустимый диапазон приемлемых углов падения расширяется) и возникновение дополнительных отраженных волн в случае неоднородной среды.

Преимуществом PML-подхода является его прямая применимость к решению любой задачи, описываемой гиперболической системой линейных дифференциальных уравнений. Например, при переходе от идеально упругих сред к вязкоупругим уравнения для PML-слоя получаются автоматически. Для уравнений PML-слоя для системы уравнений упругости легко записывается конечно-

разностная схема того же типа, что и для неизменной системы уравнений. Реализация требует относительно больших компьютерных ресурсов, чем АВС, но увеличение приемлемо относительно общей вычислительной сложности моделирования. Надо сказать, что чем шире поглощающий слой, тем выше цена реализации и ниже паразитные отражения в целевую область — ценой увеличения вычислительной сложности алгоритма можно добиться требуемой малости паразитных отражений от границы вычислительной области. Условия РМЛ обеспечивают отражения, мало зависящие от угла падающей волны, и не дают дополнительных отражений в случае неоднородной среды.

Существенным недостатком РМЛ-условий является то, что в случае неоднородной изотропной или анизотропной среды с некоторыми типами анизотропии уравнения в РМЛ-слое не являются абсолютно устойчивыми, а допускают экспоненциально растущие решения, причем в некоторых анизотропных средах растущие очень быстро [Becache et al., 2003]. На практике РМЛ для неоднородной изотропной среды, как правило, можно применять, используя достаточную ширину РМЛ-слоя. Для анизотропной среды для устранения неустойчивости предложены модифицированные уравнения РМЛ-слоя (ряд уравнений, зависящих от параметра и совпадающих с уравнениями РМЛ при значении параметра ноль), называемые М-РМЛ (сокращение от «Multiaxial Perfectly Matched Layer») [Zeng et al., 2011; Dmitriev, Lisitsa, 2011; Dmitriev, Lisitsa, 2012]. Уравнения становятся абсолютно корректными, платой за что является некоторое увеличение амплитуды волн, отраженных от границы внутрь целевой области, и появление зависимости амплитуды этих волн от угла падения.

Из научных публикаций известен альтернативный подход построения абсолютно корректных слабоотражающих условий на основе расширения сетки при помощи оптимальных сеток [Лысь, Лисица, 2008], но он пока не нашел широкого применения.

В заключение следует сказать об особенностях программной реализации конечно-разностных вычислительных алгоритмов моделирования трехмерных сред. Главной ее особенностью является требование к памяти компьютера для хранения всех необходимых для решения задачи параметров: упругих параметров среды и компонент волнового поля. Объем данных, как правило, значительно

превышает память современных персональных компьютеров, и расчеты возможны только на многопроцессорных вычислительных системах (кластерах) с распределенной памятью. Для программной реализации конечно-разностного алгоритма на таком компьютере требуется «распараллеливание» алгоритма. Достоинством явных конечно-разностных схем, к которым относятся все схемы на сдвинутых сетках, перечисленные выше, с этой точки зрения является не вызывающая затруднений параллельная реализация алгоритма путем декомпозиции области [Graves, 1996; Korneev, Vishnevsky et al., 1997; Костин и др., 2011].

Глава 2

Конечно-разностная схема

для расчета сейсмических волновых полей в анизотропных упругих средах

2.1 Постановка задачи

Как известно, в рамках динамической теории упругости распространение сейсмических волн в горных породах описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных — системой уравнений динамической теории упругости [Годунов, Рябенкий, 1973; Ландау, Лифшиц, 1987; Гольдин, 2008]. В постановке «скорости-напряжения» [Коновалов, 1999] для трехмерной декартовой системы координат эта система уравнений имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{xx} \\ g_{yy} \\ g_{zz} \\ g_{yz} \\ g_{xz} \\ g_{xy} \end{pmatrix}, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

где u_x , u_y , u_z — компоненты вектора скорости смещения, σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{yz} , σ_{xz} , σ_{xy} — компоненты тензора напряжений, g_{xx} , g_{yy} , g_{zz} , g_{yz} , g_{xz} , g_{xy} — компоненты тензора правых частей, ρ — плотность и $\mathbf{C}$ — тензор жесткости. При этом состояние упру-

гой среды u , σ и правые части g зависят от пространственных переменных x, y, z и времени t , а параметры среды ρ и $\mathbf{C}$ зависят только от пространственных переменных, но не зависят от времени. В системе уравнений (2.1) используется матричная форма тензора $\mathbf{C}$, имеющая для анизотропной среды вид:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

а для изотропной среды — специального вида:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где λ, μ — параметры Ламе.

Для системы уравнений (2.1) формулируется начально-краевая задача в полупространстве пространства $\mathbf{R}^3$ $z \geq 0$ с нулевыми начальными данными:

$$\begin{aligned} u_x|_{t=0} &= 0, & u_y|_{t=0} &= 0, & u_z|_{t=0} &= 0, \\ \sigma_{xx}|_{t=0} &= 0, & \sigma_{yy}|_{t=0} &= 0, & \sigma_{zz}|_{t=0} &= 0, \\ \sigma_{yz}|_{t=0} &= 0, & \sigma_{xz}|_{t=0} &= 0, & \sigma_{xy}|_{t=0} &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

и условиями на границе $z = 0$, соответствующими свободной от нагрузки поверх-

ности (нормальное напряжение равно нулю):

$$\sigma_{xz}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{yz}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = 0. \quad (2.5)$$

Решение отыскивается для временного отрезка, начиная от времени $t_1 = 0$, до времени $t_2 = T$.

Для численного решения начально-краевой задачи для системы уравнений (2.1) в случае изотропной среды с тензором жесткости (2.3), начальными данными (2.4) и краевыми условиями (2.5) широко применяется конечно-разностная схема на сдвинутых сетках [Virieux, 1986; Levander, 1988] (standard staggered grid scheme — в англоязычной литературе). Особенностью этой схемы является возможность аппроксимации всех производных в уравнениях на одинаковом шаблоне при помощи центральных разностей.

Для численного решения этой же начально-краевой задачи в случае анизотропной среды с тензором жесткости (2.2) используются схема на повернутых сетках [Saenger, Bohlen, 2004] (rotated staggered grid scheme — в англоязычной литературе). Альтернативным, предложенным соискателем [Лебедев, 1964; Lisitsa, Vishnevskiy, 2010] подходом к численному решению этой начально-краевой задачи в случае анизотропной среды является использование конечно-разностной схемы Лебедева. Обе схемы — и схема на повернутых сетках, и схема Лебедева — сохраняют свойство схемы на сдвинутых сетках: все производные, входящие в уравнения, аппроксимируются на едином шаблоне, построенном на центральной разности. Соискателем выполнено сравнение вычислительной экономичности этих схем [Lisitsa, Vishnevskiy, 2010] и исследованы приводящие к появлению нефизичных решений особенности схем, которые необходимо учитывать при аппроксимации начальных условий и правых частей [Лисица, Вишневский, 2011; Lisitsa, Vishnevskiy, 2011].

Для исследования свойств конечно-разностных схем потребуется широко известное [Winterstein, 1990; Гольдин, 2008] дисперсионное соотношение системы уравнений (2.1):

$$\begin{aligned} D(\omega, k_x, k_y, k_z) = \\ = C\omega(\omega^2 - V_{qP}^2(\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|})|\vec{k}|^2)(\omega^2 - V_{qSV}^2(\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|})|\vec{k}|^2)(\omega^2 - V_{qSH}^2(\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|})|\vec{k}|^2) = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где ω — частота, $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ — волновой вектор, C — константа, V_{qP} , V_{qSV} и V_{qSH} — фазовые скорости квазипродольных и квазипоперечных волн.

2.2 Конечно-разностные схемы на сдвинутых сетках для аппроксимации системы уравнений упругости

2.2.1 Схема «на сдвинутых сетках» для изотропной среды

Для построения конечно-разностной схемы на сдвинутых сетках [Virieux, 1986; Levander, 1988] для системы уравнений (2.1) с тензором жесткости (2.3) в пространстве $\mathbf{R}^3$ определяется равномерная параллелепипедная сетка Ω^V с шагами h_x , h_y , h_z . Узлы сетки — это точки с координатами $x = x_I = h_x I$, $y = y_J = h_y J$, $z = z_K = h_z K$, где значения индексов могут быть целыми и полуцелыми $I, J, K = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \dots$. Дискретизация по времени с шагом τ осуществляется аналогично: сеточные функции определяются на слоях для времени $t = t^N = \tau N$, где τ — шаг сетки по времени, $N = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$. Символами I, J, K, N обозначаются индексы с целыми и полуцелыми значениями, а символами i, j, k, n — индексы только с целыми значениями. Верхний индекс V указывает на отношение записи к схеме на сдвинутых сетках, а запись (IJK) обозначает узел сетки с индексами I, J и K . Сеточные функции, соответствующие функциям дифференциального уравнения, обозначаются добавлением квадратных скобок, например, $[u_x]$ — это сеточный аналог функции u_x .

Из множества узлов сетки выделяются семь подмножеств узлов и сеточные функции на них:

- $\Omega_{\sigma_{xx}}^V = \{(IJK) | I \notin \mathbf{Z}, J \notin \mathbf{Z}, K \notin \mathbf{Z}\}$ — в узлах сетки $\Omega_{\sigma_{xx}}^V$ на целых слоях по времени $t = \tau n$ определяются сеточные функции компонент тензора напряжений $[\sigma_{xx}]$, $[\sigma_{yy}]$ и $[\sigma_{zz}]$,
- $\Omega_{\sigma_{yz}}^V = \{(IJK) | I \notin \mathbf{Z}, J \in \mathbf{Z}, K \in \mathbf{Z}\}$ — в узлах сетки $\Omega_{\sigma_{yz}}^V$ на целых слоях по времени $t = \tau n$ определяется сеточная функция компоненты тензора напряжений $[\sigma_{yz}]$,
- $\Omega_{\sigma_{xz}}^V = \{(IJK) | I \in \mathbf{Z}, J \notin \mathbf{Z}, K \in \mathbf{Z}\}$ — в узлах сетки $\Omega_{\sigma_{xz}}^V$ на целых слоях по времени $t = \tau n$ определяется сеточная функция компоненты тензора напряжений $[\sigma_{xz}]$,

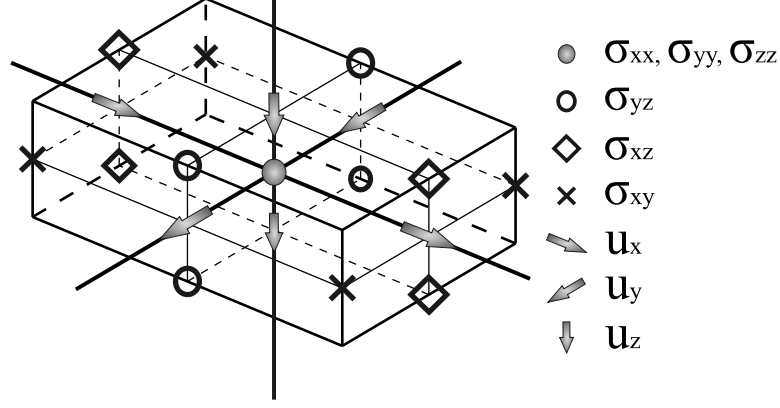


Рисунок 2.1 – Пространственная геометрия элементарной ячейки схемы на сдвинутых сетках.

- $\Omega_{\sigma_{xy}}^V = \{(IJK) | I \in \mathbf{Z}, J \in \mathbf{Z}, K \notin \mathbf{Z}\}$ — в узлах сетки $\Omega_{\sigma_{xy}}^V$ на целых слоях по времени $t = \tau n$ определяется сеточная функция компоненты тензора напряжений $[\sigma_{xy}]$,
- $\Omega_{u_x}^V = \{(IJK) | I \in \mathbf{Z}, J \notin \mathbf{Z}, K \notin \mathbf{Z}\}$ — в узлах сетки $\Omega_{u_x}^V$ на полуцелых слоях по времени $t = \tau(n + 1/2)$ определяется сеточная функция компоненты вектора скорости смещения $[u_x]$,
- $\Omega_{u_y}^V = \{(IJK) | I \notin \mathbf{Z}, J \in \mathbf{Z}, K \notin \mathbf{Z}\}$ — в узлах сетки $\Omega_{u_y}^V$ на полуцелых слоях по времени $t = \tau(n + 1/2)$ определяется сеточная функция компоненты вектора скорости смещения $[u_y]$,
- $\Omega_{u_z}^V = \{(IJK) | I \notin \mathbf{Z}, J \notin \mathbf{Z}, K \in \mathbf{Z}\}$ — в узлах сетки $\Omega_{u_z}^V$ на полуцелых слоях по времени $t = \tau(n + 1/2)$ определяется сеточная функция компоненты вектора скорости смещения $[u_z]$.

На схематичном изображении элементарной ячейки схемы на сдвинутых стеках (Рисунок 2.1) видно взаимное пространственное расположение сеточных функций, соответствующих различным компонентам волнового поля.

Для сеточных функций значения определяются по формуле:

$$[f]_{IJK}^N = f(\tau N, h_x I, h_y J, h_z K),$$

где f - любая из неизвестных функций системы (2.1). Конечно-разностные операторы на сеточных функциях, аппроксимирующие операторы дифференцирования

при помощи центральных разностей, определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
D_t[f]_{IJK}^N &= \frac{f_{IJK}^{N+1/2} - f_{IJK}^{N-1/2}}{\tau} + O(\tau^2), \\
D_x^V[f]_{IJK}^N &= \frac{f_{I+1/2JK}^N - f_{I-1/2JK}^N}{h_x} + O(h_x^2), \\
D_y^V[f]_{IJK}^N &= \frac{f_{I+1/2JK}^N - f_{I-1/2JK}^N}{h_y} + O(h_y^2), \\
D_z^V[f]_{IJK}^N &= \frac{f_{IJK+1/2}^N - f_{IJK-1/2}^N}{h_z} + O(h_z^2).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Эти конечно-разностные операторы аппроксимируют дифференциальные операторы $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ со вторым порядком в центральной точке: $t = t^N$, $x = x_I$, $y = y_J$, $z = z_K$, при достаточной гладкости функции f .

С использованием введенных обозначений и операторов дифференциальные операторы системы (2.1) заменяются на их конечно-разностные аналоги по формулам (2.7), приводя к системе конечно-разностных уравнений, которые называют «схемой на сдвинутых сетках»:

$$\left\{ \begin{aligned}
\rho_{IJK} D_t[u_x]_{IJK}^{n+1/2} &= D_x^V[\sigma_{xx}]_{IJK}^{n+1/2} + D_y^V[\sigma_{xy}]_{IJK}^{n+1/2} + D_z^V[\sigma_{xz}]_{IJK}^{n+1/2}, (IJK) \in \Omega_{u_x}^V, \\
\rho_{IJK} D_t[u_y]_{IJK}^{n+1/2} &= D_x^V[\sigma_{xy}]_{IJK}^{n+1/2} + D_y^V[\sigma_{yy}]_{IJK}^{n+1/2} + D_z^V[\sigma_{yz}]_{IJK}^{n+1/2}, (IJK) \in \Omega_{u_y}^V, \\
\rho_{IJK} D_t[u_z]_{IJK}^{n+1/2} &= D_x^V[\sigma_{xz}]_{IJK}^{n+1/2} + D_y^V[\sigma_{yz}]_{IJK}^{n+1/2} + D_z^V[\sigma_{zz}]_{IJK}^{n+1/2}, (IJK) \in \Omega_{u_z}^V, \\
D_t[\sigma_{xx}]_{IJK}^n &= (\lambda + 2\mu)_{IJK} D_x^V[u_x]_{IJK}^n + \\
&\quad \lambda_{IJK} D_y^V[u_y]_{IJK}^n + \lambda_{IJK} D_z^V[u_z]_{IJK}^n + (g_{xx})_{IJK}, (IJK) \in \Omega_{\sigma_{xx}}^V, \\
D_t[\sigma_{yy}]_{IJK}^n &= \lambda_{IJK} D_x^V[u_x]_{IJK}^n + \\
&\quad (\lambda + 2\mu)_{IJK} D_y^V[u_y]_{IJK}^n + \lambda_{IJK} D_z^V[u_z]_{IJK}^n + (g_{yy})_{IJK}, (IJK) \in \Omega_{\sigma_{yy}}^V, \\
D_t[\sigma_{zz}]_{IJK}^n &= \lambda_{IJK} D_x^V[u_x]_{IJK}^n + \\
&\quad \lambda_{IJK} D_y^V[u_y]_{IJK}^n + (\lambda + 2\mu)_{IJK} D_z^V[u_z]_{IJK}^n + (g_{zz})_{IJK}, (IJK) \in \Omega_{\sigma_{zz}}^V, \\
D_t[\sigma_{yz}]_{IJK}^n &= \mu_{IJK} (D_y^V[u_z]_{IJK}^n + D_z^V[u_y]_{IJK}^n) + (g_{yz})_{IJK}, (IJK) \in \Omega_{\sigma_{yz}}^V, \\
D_t[\sigma_{xz}]_{IJK}^n &= \mu_{IJK} (D_x^V[u_z]_{IJK}^n + D_z^V[u_x]_{IJK}^n) + (g_{xz})_{IJK}, (IJK) \in \Omega_{\sigma_{xz}}^V, \\
D_t[\sigma_{xy}]_{IJK}^n &= \mu_{IJK} (D_x^V[u_y]_{IJK}^n + D_y^V[u_x]_{IJK}^n) + (g_{xy})_{IJK}, (IJK) \in \Omega_{\sigma_{xy}}^V.
\end{aligned} \right. \tag{2.8}$$

Полученная конечно-разностная схема явная: значения сеточных функций

на следующем шаге по времени явно выражаются через значения на предыдущем шаге. Условие её устойчивости:

$$\tau < \frac{h_x h_y h_z}{\sqrt{h_x^2 h_y^2 + h_y^2 h_z^2 + h_x^2 h_z^2}} \times \frac{1}{\max_{IJK} [V_p]_{IJK}},$$

где $V_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ — скорость распространения продольных волн. Схема имеет второй порядок аппроксимации на решениях достаточной гладкости.

Коэффициенты уравнений (2.1) ρ , λ и μ могут иметь разрывы. Важным для геофизики случаем является задание коэффициентов модели среды как кусочно-постоянных функций с кусочно-гладкими границами разрыва (почти везде). Решение системы (2.1) с такими коэффициентами становится недифференцируемым в местах разрыва коэффициентов, и на границах разрыва коэффициентов от решения требуется удовлетворение условиям согласования. Если коэффициенты имеют разрыв вдоль поверхности S , то при переходе через эту поверхность должны выполняться условия неразрывности среды и непрерывности нормальных напряжений. Условие неразрывности среды представляется равенством:

$$[\vec{u}]_S = 0, \quad (2.9)$$

где $[\cdot]_S$ — значение скачка функции при переходе через границу S ; условие непрерывности нормальных напряжений:

$$[\sigma * \vec{n}]_S = 0, \quad (2.10)$$

где $\vec{n}$ — нормаль к S . Условия согласования (2.9) и (2.10) записываются в векторной форме, и каждое из них даёт три условия в покомпонентном выражении. Например, для горизонтальной границы $z = z_0$ покомпонентная запись представляется

равенствами:

$$[u_x]|_{z=z_0} = 0,$$

$$[u_y]|_{z=z_0} = 0,$$

$$[u_z]|_{z=z_0} = 0,$$

$$[\sigma_{xz}]|_{z=z_0} = 0,$$

$$[\sigma_{yz}]|_{z=z_0} = 0,$$

$$[\sigma_{zz}]|_{z=z_0} = 0.$$

Для определения коэффициентов конечно-разностной схемы на сдвинутых сетках в среде с разрывными коэффициентами используется интегро-интерполяционный метод [Самарский, 1983]. Коэффициенты схемы находятся при условии, что разрывы коэффициентов среды проходят по граням ячеек сетки $x = h_x i$, $y = h_y j$, $z = h_z k$. Это соответствует ситуации, часто встречающейся на практике, когда модель задана на сетке в дискретизованном виде.

Определение коэффициентов схемы начинается с рассмотрения первого уравнения системы (2.1) для компоненты вектора скорости смещения u_x :

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\sigma_{xz}}{\partial z},$$

которое интегрируется по параллелепипедной ячейке

$$V_x = [h_x(i - 1/2), h_x(i + 1/2)] \times [h_y j, h_y(j + 1)] \times [h_z k, h_z(k + 1)]$$

размером $h_x \times h_y \times h_z$ с центром в точке $(I = i, J = j + 1/2, K = k + 1/2) \in \Omega_{u_x}^V$ для $t = \tau(n + 1/2)$:

$$\iiint_{V_x} \rho(x, y, z) \frac{\partial u_x}{\partial t} dx dy dz = \iiint_{V_x} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dx dy dz.$$

При этом плотность ρ может иметь разрыв на плоскости $z = h_z k$.

Затем левая часть равенства преобразуется по теореме о среднем, правая —

по формуле Остроградского-Гаусса:

$$\begin{aligned}
\iiint_{V_x} \rho(x, y, z) dx dy dz \times \frac{\partial u_x}{\partial t}(\xi) &= \oint_S \sigma_{xx} dy dz + \sigma_{xy} dx dz + \sigma_{xz} dx dy = \\
&= \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_{xx}(x_{i+1/2}, y, z) - \sigma_{xx}(x_{i-1/2}, y, z)) dy dz + \\
&+ \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_{xy}(x, y_{j+1}, z) - \sigma_{xy}(x, y_j, z)) dx dz + \\
&+ \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} (\sigma_{xz}(x, y, z_{k+1}) - \sigma_{xz}(x, y, z_k)) dx dy,
\end{aligned}$$

где S — поверхность, ограничивающая V_x , $\xi \in V_x$ — некоторая точка ячейки.

Из условия (2.10) следует непрерывность σ_{xy} и σ_{xz} при переходе через границу разрыва коэффициентов. Следовательно, интегралы в правой части аппроксимируются по формуле прямоугольников по значению в центральной точке с первым порядком аппроксимации. Из условия (2.9) следует непрерывность u_x , и производная в точке ξ в левой части уравнения аппроксимируется через производную в центральной точке ячейки также с первым порядком:

$$\begin{aligned}
h_x h_y h_z \bar{\rho} \times \frac{[u_x]_{IJK}^{n+1} - [u_x]_{IJK}^n}{\tau} &= \\
&= h_y h_z ([\sigma_{xx}]_{I+1/2JK}^{n+1/2} - [\sigma_{xx}]_{I-1/2JK}^{n+1/2}) + \\
&+ h_x h_z ([\sigma_{xy}]_{IJ+1K}^{n+1/2} - [\sigma_{xy}]_{IJK}^{n+1/2}) + \\
&+ h_x h_y ([\sigma_{xz}]_{IJK+1}^{n+1/2} - [\sigma_{xz}]_{IJK}^{n+1/2}),
\end{aligned}$$

где $\bar{\rho}$ — среднее значение плотности по области интегрирования V_x . После деления правой и левой части этого уравнения на $h_x h_y h_z$, оно совпадает с первым уравнением конечно-разностной схемы (2.8), что дает значение коэффициента:

$$\rho_{IJK} = \rho_{ij+1/2k+1/2} = \frac{\iiint_{V_x} \rho(x, y, z) dx dy dz}{h_x h_y h_z} = \frac{\rho(x_{i-1/2}, y_{j+1/2}, z_{k+1/2}) + \rho(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z_{k+1/2})}{2}, \quad (2.11)$$

т.е. значение коэффициента плотности в первом уравнении конечно-разностной схемы (2.8) для компоненты вектора скорости смещения u_x , лежащей на границе

двух ячеек сетки, берется как среднее арифметическое плотностей в этих ячейках.

Коэффициенты конечно-разностной схемы (2.8) для второго и третьего уравнений системы (2.1) для компонент вектора скорости смещения u_y и u_z находятся аналогично.

Для уравнений 4–6 системы (2.1) для компонент тензора напряжений σ_{xx} , σ_{yy} и σ_{zz} конечно-разностные отношения задаются внутри ячейки — в однородной среде, не содержащей разрывов коэффициентов. Поэтому коэффициенты конечно-разностной схемы для этих уравнений определяются тривиально: они совпадают с коэффициентами системы дифференциальных уравнений в соответствующей точке.

Для определения коэффициентов конечно-разностной схемы (2.8) для седьмого уравнения системы (2.1) для компоненты тензора напряжений σ_{yz} :

$$\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)$$

оно делится на μ :

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z},$$

чтобы после интегрирования применить формулу Грина к правой части. Затем уравнение интегрируется по ячейке $V_{yz} = [h_x i, h_x(i+1)] \times [h_y(j-1/2), h_y(j+1/2)] \times [h_z(k-1/2), h_z(k+1/2)]$ с центром в точке $(I = i + 1/2, J = j, K = k) \in \Omega_{\sigma_{yz}}^V$:

$$\iiint_{V_{yz}} \frac{1}{\mu(x, y, z)} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} dx dy dz = \iiint_{V_{yz}} \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} dx dy dz.$$

Здесь коэффициент μ может иметь разрыв по плоскостям $y = h_y J = h_y j$ и $z = h_z K = h_z k$. К левой части полученного равенства применяется теорема о среднем,

к правой — формула Остроградского – Гаусса:

$$\begin{aligned}
\iiint_{V_{yz}} \frac{1}{\mu(x, y, z)} dx dy dz \times \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t}(\xi) &= \oint_S u_z dx dz + u_y dx dy = \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} (u_z(x, y_{j+1/2}, z) - u_z(x, y_{j-1/2}, z)) dx dz + \\
&\quad + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} (u_y(x, y, z_{k+1/2}) - u_y(x, y, z_{k-1/2})) dx dy,
\end{aligned}$$

где S — поверхность, ограничивающая V_{yz} , $\xi \in V_{xz}$ — некоторая точка ячейки.

Из условия (2.10) следует непрерывность σ_{yz} при переходе через границу разрыва коэффициентов. Следовательно, интегралы в правой части аппроксимируются по формуле прямоугольников по значению в центральной точке с первым порядком аппроксимации. Из условия (2.9) следует непрерывность u_y и u_z , откуда производная в точке ξ в левой части аппроксимируется через производную в центральной точке ячейки также с первым порядком:

$$\begin{aligned}
h_x h_y h_z \overline{\mu^{-1}} \times \frac{[\sigma_{yz}]_{IJK}^{n+1/2} - [\sigma_{yz}]_{IJK}^{n-1/2}}{\tau} &= \\
&= h_x h_z ([u_z]_{IJK+1/2}^n - [u_z]_{IJK-1/2}^n) + h_x h_y ([u_y]_{IJK+1/2}^n - [u_y]_{IJK-1/2}^n),
\end{aligned}$$

где $\overline{\mu^{-1}}$ — среднее значение μ^{-1} по области интегрирования V_{yz} . После деления этого уравнения на $h_x h_y h_z$, оно совпадает с седьмым уравнением конечно-разностной схемы (2.8) с коэффициентом μ_{IJK} :

$$\begin{aligned}
\mu_{IJK} = \mu_{i+1/2jk} &= \frac{h_x h_y h_z}{\iiint_{V_{yz}} \mu^{-1}(x, y, z) dx dy dz} = \\
&= 4 \left(\mu(x_{i-1/2}, y_{j-1/2}, z_{k-1/2})^{-1} + \mu(x_{i-1/2}, y_{j+1/2}, z_{k-1/2})^{-1} + \right. \\
&\quad \left. + \mu(x_{i-1/2}, y_{j-1/2}, z_{k+1/2})^{-1} + \mu(x_{i-1/2}, y_{j+1/2}, z_{k+1/2})^{-1} \right)^{-1}. \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Т.е. коэффициент μ в уравнении для компоненты тензора напряжений σ_{yz} берется как среднее геометрическое по четырем ячейкам сетки.

Коэффициенты конечно-разностной схемы (2.8) для восьмого и девятого уравнений системы (2.1) на компоненты тензора напряжений σ_{xz} и σ_{xy} находят-

ся аналогично. В результате определены все коэффициенты конечно-разностной схемы на сдвинутых сетках, т.е. схема определена полностью.

Формулы для значений коэффициентов схемы (2.11) и (2.12) найдены интегро-интерполяционным методом, поэтому не требуется специально отслеживать границы разрывов коэффициентов данных, все вычисления выполняются по единообразным формулам: схема на сдвинутых сетках является схемой сквозного счёта [Самарский, 1983; Mosco et al., 2002].

2.2.2 Схема «на повернутых сетках» для анизотропной среды

При использовании схемы на сдвинутых сетках для аппроксимации системы уравнений упругости (2.1) для анизотропной среды с тензором жесткости общего вида (2.3) шаблон схемы не позволяет аппроксимировать часть производных, входящих в систему. Поэтому для расчета волновых полей в анизотропных средах используется другая конечно-разностная схема, также построенная на сдвинутых сетках, — схема на повернутых сетках [Saenger et al., 2000].

Для численного решения системы уравнений упругости (2.1) с тензором жесткости (2.2) в пространстве $\mathbf{R}^3$ вводится равномерная параллелепипедная сетка Ω^R с шагами h_x, h_y, h_z по пространству. Верхний индекс R указывает принадлежность сетки схеме на повернутых сетках. Узлы сетки располагаются в точках $(h_x I, h_y J, h_z K)$, где индексы I, J, K могут принимать целые и полуцелые значения $I, J, K = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \dots$. Шаг дискретизации по времени τ , значение времени для сеточных функций, может принимать целые и полуцелые значения $t^N = \tau N$, $N = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ (см. 2.2.1).

На множестве узлов Ω^R определяются подмножества:

- узлы с целочисленными индексами $\Omega_\sigma^R = \{(IJK) | I \in \mathbf{Z}, J \in \mathbf{Z}, K \in \mathbf{Z}\}$;
- узлы с полуцелыми индексами $\Omega_u^R = \{(IJK) | I \notin \mathbf{Z}, J \notin \mathbf{Z}, K \notin \mathbf{Z}\}$.

Все компоненты сеточного вектора смещений схемы на повернутых сетках $[u_x], [u_y], [u_z]$ определяются в узлах Ω_u^R на целых слоях по времени, все компоненты сеточного тензора напряжений $[\sigma_{xx}], [\sigma_{yy}], [\sigma_{zz}], [\sigma_{yz}], [\sigma_{xz}], [\sigma_{xy}]$ определяются в узлах Ω_σ^R на полуцелых слоях по времени. На схематичном изображении элементарной ячейки схемы на повернутых сетках (Рисунок 2.2) показано пространственное располо-

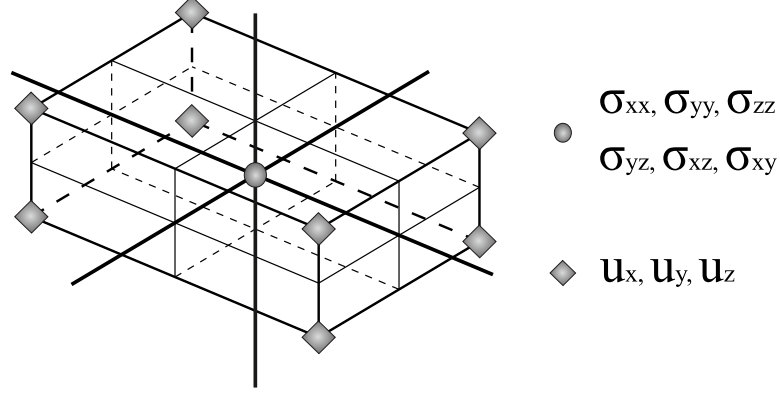


Рисунок 2.2 – Пространственная геометрия элементарной ячейки схемы на повернутых сетках.

жение сеточных функций, соответствующих различным компонентам волнового поля.

Значения сеточных функции определяются по формуле:

$$f_{IJK}^N = f(\tau N, h_x I, h_y J, h_z K),$$

где f — любая из неизвестных функций системы (2.1). Далее определяются операторы интерполяции по двум и четырем точкам:

$$\begin{aligned} B_x[f]_{IJK}^N &= \frac{f_{I+1/2JK}^N + f_{I-1/2JK}^N}{2}, \\ B_y[f]_{IJK}^N &= \frac{f_{IJ+1/2K}^N + f_{IJ-1/2K}^N}{2}, \\ B_z[f]_{IJK}^N &= \frac{f_{IJK+1/2}^N + f_{IJK-1/2}^N}{2}, \\ B_{yz}[f]_{IJK}^N &= \frac{f_{IJ+1/2K+1/2}^N + f_{IJ+1/2K-1/2}^N + f_{IJ-1/2K+1/2}^N + f_{IJ-1/2K-1/2}^N}{4} = \\ &= B_y[B_z[f]]_{IJK}^N = B_z[B_y[f]]_{IJK}^N, \\ B_{xz}[f]_{IJK}^N &= \frac{f_{I+1/2JK+1/2}^N + f_{I+1/2JK-1/2}^N + f_{I-1/2JK+1/2}^N + f_{I-1/2JK-1/2}^N}{4} = \\ &= B_x[B_z[f]]_{IJK}^N = B_z[B_x[f]]_{IJK}^N, \\ B_{xy}[f]_{IJK}^N &= \frac{f_{I+1/2J+1/2K}^N + f_{I+1/2J-1/2K}^N + f_{I-1/2J+1/2K}^N + f_{I-1/2J-1/2K}^N}{4} = \\ &= B_x[B_y[f]]_{IJK}^N = B_y[B_x[f]]_{IJK}^N, \end{aligned}$$

и с их помощью определяются операторы конечно-разностного дифференцирова-

ния:

$$\begin{aligned}
D_t[f]_{IJK}^N &= \frac{f_{IJK}^{N+1/2} - f_{IJK}^{N-1/2}}{\tau}, \\
D_x^R[f]_{IJK}^N &= \frac{B_{yz}[f]_{I+1/2JK}^N - B_{yz}[f]_{I-1/2JK}^N}{h_x}, \\
D_y^R[f]_{IJK}^N &= \frac{B_{xz}[f]_{IJ+1/2K}^N - B_{xz}[f]_{IJ-1/2K}^N}{h_y}, \\
D_z^R[f]_{IJK}^N &= \frac{B_{xy}[f]_{IJK+1/2}^N - B_{xy}[f]_{IJK-1/2}^N}{h_z},
\end{aligned} \tag{2.13}$$

т.е. производные аппроксимируются на восьмиточечном шаблоне. При достаточной гладкости функции f конечно-разностными операторами (2.13) со вторым порядком аппроксимируются производные $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$.

Замена всех частных производных системы (2.1) по формулам (2.13) — последний этап в получении конечно-разностной схемы на повернутых сетках:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_{IJK} D_t[u_x]_{IJK}^{n+1/2} &= D_x^R[\sigma_{xx}]_{IJK}^{n+1/2} + D_y^R[\sigma_{xy}]_{IJK}^{n+1/2} + D_z^R[\sigma_{xz}]_{IJK}^{n+1/2}, \\ \rho_{IJK} D_t[u_y]_{IJK}^{n+1/2} &= D_x^R[\sigma_{xy}]_{IJK}^{n+1/2} + D_y^R[\sigma_{yy}]_{IJK}^{n+1/2} + D_z^R[\sigma_{yz}]_{IJK}^{n+1/2}, \\ \rho_{IJK} D_t[u_z]_{IJK}^{n+1/2} &= D_x^R[\sigma_{xz}]_{IJK}^{n+1/2} + D_y^R[\sigma_{yz}]_{IJK}^{n+1/2} + D_z^R[\sigma_{zz}]_{IJK}^{n+1/2}, \\ &\quad (IJK) \in \Omega_u^R, \\ \left(\begin{array}{c} D_t[\sigma_{xx}]_{IJK}^n \\ D_t[\sigma_{yy}]_{IJK}^n \\ D_t[\sigma_{zz}]_{IJK}^n \\ D_t[\sigma_{yz}]_{IJK}^n \\ D_t[\sigma_{xz}]_{IJK}^n \\ D_t[\sigma_{xy}]_{IJK}^n \end{array} \right) &= C_{IJK} \left(\begin{array}{c} D_x^R[u_x]_{IJK}^n \\ D_y^R[u_y]_{IJK}^n \\ D_z^R[u_z]_{IJK}^n \\ D_y^R[u_z]_{IJK}^n + D_z^R[u_y]_{IJK}^n \\ D_x^R[u_z]_{IJK}^n + D_z^R[u_x]_{IJK}^n \\ D_x^R[u_y]_{IJK}^n + D_y^R[u_x]_{IJK}^n \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} g_{xx} \\ g_{yy} \\ g_{zz} \\ g_{yz} \\ g_{xz} \\ g_{xy} \end{array} \right)_{IJK}, \\ &\quad (IJK) \in \Omega_\sigma^R. \end{aligned} \right. \tag{2.14}$$

Полученная схема является явной конечно-разностной схемой второго порядка аппроксимации на непрерывных коэффициентах с условием устойчивости:

$$\tau < \min[h_x, h_y, h_z] \times \frac{1}{\max_{IJK} [qV_P]_{IJK}},$$

где qV_P — скорость распространения квазипродольных волн.

Когда коэффициенты ρ и C уравнений (2.1) разрывны, коэффициенты конечно-разностной схемы определяются интегро-интерполяционным методом в предположении, что разрывы коэффициентов среды проходят по границам ячеек сетки $x = h_x i$, $y = h_y j$, $z = h_z k$. Для этого рассматривается сначала первое уравнение системы (2.1) для компоненты вектора скорости смещения u_x :

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\sigma_{xz}}{\partial z}$$

и интегрируется по параллелепипеду $R_x = [h_x(I-1/2), h_x(I+1/2)] \times [h_y(J-1/2), h_y(J+1/2)] \times [h_z(K-1/2), h_z(K+1/2)]$ размеров $h_x \times h_y \times h_z$, $(I, J, K) \in \Omega_u^R$ для $t = \tau(n+1/2)$:

$$\iiint_{R_x} \rho(x, z) \frac{\partial u_x}{\partial t} dx dy dz = \iiint_{R_x} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dx dy dz.$$

Применение к левой части равенства теоремы о среднем, а к правой — формулы Остроградского-Гаусса дает интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} \iiint_{R_x} \rho(x, y, z) dx dy dz \times \frac{\partial u_x}{\partial t}(\xi) &= \oint_S \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z dS = \\ &= \int_{x_{I-1/2}}^{x_{I+1/2}} \int_{y_{J-1/2}}^{y_{J+1/2}} \int_{z_{K-1/2}}^{z_{K+1/2}} (\sigma_{xx}(x_{I+1/2}, y, z) - \sigma_{xx}(x_{I-1/2}, y, z)) dy dz + \\ &+ \int_{x_{I-1/2}}^{x_{I+1/2}} \int_{y_{J+1/2}}^{y_{J+1/2}} (\sigma_{xy}(x, y_{J+1/2}, z) - \sigma_{xy}(x, y_{J-1/2}, z)) dx dz + \\ &+ \int_{x_{I-1/2}}^{x_{I+1/2}} \int_{y_{J-1/2}}^{y_{J+1/2}} (\sigma_{xz}(x, y, z_{J+1/2}) - \sigma_{xz}(x, y, z_{J-1/2})) dx dy, \end{aligned}$$

где S — поверхность, ограничивающая R_x , $\xi \in R_x$ — некоторая точка параллелепипеда R_x .

Из условия (2.9) компонента вектора скорости смещения u_x непрерывна при переходе через границу разрыва коэффициентов. Следовательно, производная в точке ξ в левой части аппроксимируется через производную в центральной точке ячейки с первым порядком. Интегралы в правой части аппроксимируются по формуле прямоугольников по четырем точкам с первым порядком вследствие кусочной

непрерывности подынтегральных функций:

$$\begin{aligned}
& h_x h_y h_z \bar{\rho} \times \frac{[u_x]_{IJK}^{n+1} - [u_x]_{IJK}^n}{\tau} = \\
& = h_y h_z \left([\sigma_{xx}]_{I+1/2J+1/2K+1/2}^{n+1/2} + [\sigma_{xx}]_{I+1/2J-1/2K+1/2}^{n+1/2} + \right. \\
& + [\sigma_{xx}]_{I+1/2J+1/2K-1/2}^{n+1/2} + [\sigma_{xx}]_{I+1/2J-1/2K-1/2}^{n+1/2} - [\sigma_{xx}]_{I-1/2J+1/2K+1/2}^{n+1/2} - \\
& - [\sigma_{xx}]_{I-1/2J-1/2K+1/2}^{n+1/2} - [\sigma_{xx}]_{I-1/2J+1/2K-1/2}^{n+1/2} - [\sigma_{xx}]_{I-1/2J-1/2K-1/2}^{n+1/2} \left. \right) + \\
& + h_x h_z \left([\sigma_{xy}]_{I+1/2J+1/2K+1/2}^{n+1/2} + [\sigma_{xy}]_{I-1/2J+1/2K+1/2}^{n+1/2} + \right. \\
& + [\sigma_{xy}]_{I+1/2J+1/2K-1/2}^{n+1/2} + [\sigma_{xy}]_{I-1/2J+1/2K-1/2}^{n+1/2} - [\sigma_{xy}]_{I+1/2J-1/2K+1/2}^{n+1/2} - \\
& - [\sigma_{xy}]_{I-1/2J-1/2K+1/2}^{n+1/2} - [\sigma_{xy}]_{I+1/2J-1/2K-1/2}^{n+1/2} - [\sigma_{xy}]_{I-1/2J-1/2K-1/2}^{n+1/2} \left. \right) + \\
& + h_x h_y \left([\sigma_{xz}]_{I+1/2J+1/2K+1/2}^{n+1/2} + [\sigma_{xz}]_{I-1/2J+1/2K+1/2}^{n+1/2} + \right. \\
& + [\sigma_{xz}]_{I+1/2J-1/2K+1/2}^{n+1/2} + [\sigma_{xz}]_{I-1/2J-1/2K+1/2}^{n+1/2} - [\sigma_{xz}]_{I+1/2J+1/2K-1/2}^{n+1/2} - \\
& - [\sigma_{xz}]_{I-1/2J+1/2K-1/2}^{n+1/2} - [\sigma_{xz}]_{I+1/2J-1/2K-1/2}^{n+1/2} - [\sigma_{xz}]_{I-1/2J-1/2K-1/2}^{n+1/2} \left. \right).
\end{aligned}$$

Здесь $\bar{\rho}$ — среднее значение плотности по ячейке. После деления правой и левой частей уравнения на $h_x h_y h_z$ полученное уравнение совпадает с первым уравнением конечно-разностной схемы (2.14), и коэффициент ρ_{IJK} приобретает значение:

$$\rho_{IJK} = \frac{\iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz}{h_x h_y h_z} = \frac{\Sigma \rho_{I\pm 1/2J\pm 1/2K\pm 1/2}}{8}, \quad (2.15)$$

т.е. является средним арифметическим значений плотности во всех прилегающих ячейках сетки.

Повторение тех же действий для 2 и 3 уравнений системы (2.1) для компонент вектора скорости смещения u_y и u_z дают для коэффициентов ρ_{IJK} формулы, совпадающие с формулой (2.15).

Коэффициенты уравнений 4-9 для компонент тензора напряжений σ_{ij} находятся тривиально, так как все конечно-разностные отношения этих уравнений задаются внутри ячейки сетки, что завершает определение коэффициентов конечно-разностной схемы на повернутых сетках.

2.2.3 «Схема Лебедева» для анизотропной среды

Альтернативой использованию схемы на повернутых сетках (2.14) для анизотропной упругой среды является использование схемы Лебедева. Конечно-разностная сетка, используемая при построении этой схемы, вводится В. И. Лебедевым при рассмотрении разностных аналогов ортогональных разложений дифференциальных операторов [Лебедев, 1964]. Затем эта сетка используется при построении конечно-разностной схемы для численного решения системы уравнений Максвелла [Davydycheva et al., 2003], и далее та же сетка применяется для построения конечно-разностной схемы для численного решения системы уравнений упругости (2.1) [Lisitsa, Vishnevskiy, 2010].

Конечно-разностная схема Лебедева строится для системы уравнений упругости (2.1) с тензором жесткости (2.2), соответствующим анизотропной среде следующим образом. В пространстве $\mathbf{R}^3$ задается равномерная параллелепипедная сетка Ω^L с шагами h_x, h_y, h_z по пространству. Верхний индекс L указывает на принадлежность сетки схеме Лебедева. Узлы сетки располагаются в точках $(h_x I, h_y J, h_z K)$, где индексы I, J, K могут принимать целые и полуцелые значения $I, J, K = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \dots$. Шаг дискретизации по времени τ , по времени сеточные функции располагаются на слоях с целыми и полуцелыми значениями $t^N = \tau N$, $N = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

На множестве узлов Ω^L определяются два подмножества:

- точки сетки с целой суммой пространственных индексов $\Omega_\sigma^L = \{(IJK) | I + J + K \in \mathbf{Z}\}$;
- точки сетки с полуцелой суммой пространственных индексов $\Omega_u^L = \{(IJK) | I + J + K \notin \mathbf{Z}\}$.

Все компоненты сеточного вектора скорости смещения для схемы Лебедева $[u_x], [u_y], [u_z]$ определяются в узлах Ω_u^L на целых слоях по времени, все компоненты сеточного тензора напряжений $[\sigma_{xx}], [\sigma_{yy}], [\sigma_{zz}], [\sigma_{yz}], [\sigma_{xz}], [\sigma_{xy}]$ определяются в узлах Ω_σ^L на полуцелых слоях по времени. На схематичном изображении элементарной ячейки схемы Лебедева (Рисунок 2.3) видно взаимное пространственное расположение сеточных функций, соответствующих различным компонентам волнового поля.

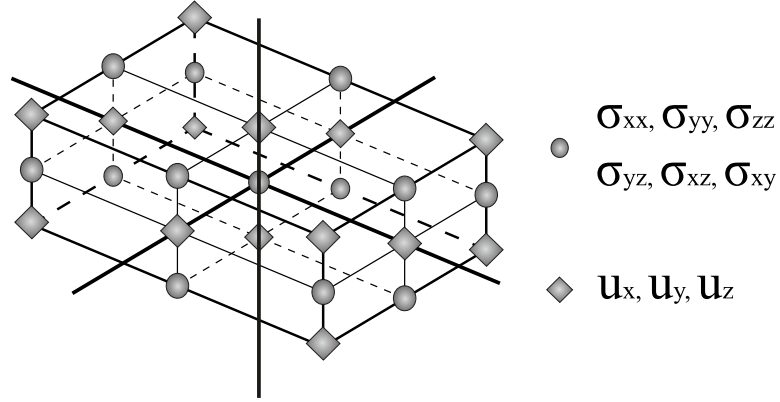


Рисунок 2.3 – Пространственная геометрия элементарной ячейки схемы Лебедева.

Значения сеточных функций в узлах сетки задаются формулой:

$$f_{IJK}^N = f(\tau N, h_x I, h_y J, h_z K),$$

где f — любая из компонент системы (2.1). Для сеточных функций определяются операторы конечно-разностного дифференцирования:

$$\begin{aligned} D_t[f]_{IJK}^N &= \frac{f_{IJK}^{N+1/2} - f_{IJK}^{N-1/2}}{\tau}, \\ D_x^L[f]_{IJK}^N &= \frac{f_{I+1/2JK}^N - f_{I-1/2JK}^N}{h_x}, \\ D_y^L[f]_{IJK}^N &= \frac{f_{IJ+1/2K}^N - f_{IJ-1/2K}^N}{h_y}, \\ D_z^L[f]_{IJK}^N &= \frac{f_{IJK+1/2}^N - f_{IJK-1/2}^N}{h_z}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

которые при достаточной гладкости функции f аппроксимируют операторы дифференцирования $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ со вторым порядком.

Замена производных системы (2.1) при помощи формул (2.16) — последний

шаг в получении конечно-разностной схемы Лебедева:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{IJK} D_t [u_x]_{IJK}^{n+1/2} = D_x^L [\sigma_{xx}]_{IJK}^{n+1/2} + D_y^L [\sigma_{xy}]_{IJK}^{n+1/2} + D_z^L [\sigma_{xz}]_{IJK}^{n+1/2}, \\ \rho_{IJK} D_t [u_y]_{IJK}^{n+1/2} = D_x^L [\sigma_{xy}]_{IJK}^{n+1/2} + D_y^L [\sigma_{yy}]_{IJK}^{n+1/2} + D_z^L [\sigma_{yz}]_{IJK}^{n+1/2}, \\ \rho_{IJK} D_t [u_z]_{IJK}^{n+1/2} = D_x^L [\sigma_{xz}]_{IJK}^{n+1/2} + D_y^L [\sigma_{yz}]_{IJK}^{n+1/2} + D_z^L [\sigma_{zz}]_{IJK}^{n+1/2}, \\ (IJK) \in \Omega_u^L, \\ \left(\begin{array}{c} D_t [\sigma_{xx}]_{IJK}^n \\ D_t [\sigma_{yy}]_{IJK}^n \\ D_t [\sigma_{zz}]_{IJK}^n \\ D_t [\sigma_{yz}]_{IJK}^n \\ D_t [\sigma_{xz}]_{IJK}^n \\ D_t [\sigma_{xy}]_{IJK}^n \end{array} \right) = C_{IJK} \left(\begin{array}{c} D_x^L [u_x]_{IJK}^n \\ D_y^L [u_y]_{IJK}^n \\ D_z^L [u_z]_{IJK}^n \\ D_y^L [u_z]_{IJK}^n + D_z^L [u_y]_{IJK}^n \\ D_x^L [u_z]_{IJK}^n + D_z^L [u_x]_{IJK}^n \\ D_x^L [u_y]_{IJK}^n + D_y^L [u_x]_{IJK}^n \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} g_{xx} \\ g_{yy} \\ g_{zz} \\ g_{yz} \\ g_{xz} \\ g_{xy} \end{array} \right)_{IJK}, \\ (IJK) \in \Omega_\sigma^L. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Полученная схема является явной конечно-разностной схемой второго порядка аппроксимации на непрерывных коэффициентах с условием устойчивости:

$$\tau < \frac{h_x h_y h_z}{\sqrt{h_x^2 h_y^2 + h_y^2 h_z^2 + h_x^2 h_z^2}} \times \frac{1}{\max_{IJK} [qV_p]_{IJK}},$$

где qV_p – скорость распространения квазипродольных волн.

Коэффициенты ρ и C системы уравнений (2.1) могут иметь разрывы, тогда от компонент уравнений требуется удовлетворение условиям согласования (2.9) и (2.10). Как показывают исследования [Muir et al., 1992; Mosco et al., 2002], для содержащей разрывы скоростной модели среды коэффициенты схемы Лебедева находятся как усреднение тонкослоистой среды [Backus, 1962; Schoenberg, Muir, 1989] в предположении, что разрывы коэффициентов проходят по границам ячеек сетки $x = h_x i$, $y = h_y j$, $z = h_z k$.

На примере горизонтальной границы $z = 0$ коэффициенты схемы находятся следующим образом. В соотношении между коэффициентами тензора напряжений σ_{ij} и скоростями смещений u_i в уравнениях 4-9 системы (2.1) скорости смещений

заменяются на их выражение через деформации ε_{ij} :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{41} & C_{51} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{42} & C_{52} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} & C_{53} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{54} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}.$$

В случае горизонтальной границы компоненты напряжений σ_{zz} , σ_{yz} , σ_{xz} и деформаций ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{xy} непрерывны на границе, а остальные компоненты могут иметь разрывы. Поэтому компоненты уравнений переупорядочиваются, чтобы собрать вместе разрывные (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} и ε_{zz} , ε_{yz} , ε_{xz}) и неразрывные (σ_{zz} , σ_{yz} , σ_{xz} и ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{xy}) компоненты:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma^N \\ \sigma^T \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{13} & C_{23} & C_{36} \\ C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{14} & C_{24} & C_{46} \\ C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{15} & C_{25} & C_{56} \\ C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} C^{NN} & C^{NT} \\ C^{TN} & C^{TT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^N \\ \varepsilon^T \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Эта система уравнений разрешается относительно разрывных компонент волнового поля σ^T и ε^N , после чего интегрируются по ячейкам сетки:

$$\begin{aligned} \langle \sigma^T \rangle &= \langle C^{TT} - C^{TN}(C^{NN})^{-1}C^{NT} \rangle \varepsilon_{IJK}^T + \langle C^{TN}(C^{NN})^{-1} \rangle \sigma_{IJK}^N, \\ \langle \varepsilon^N \rangle &= - \langle (C^{NN})^{-1}C^{NT} \rangle \varepsilon_{IJK}^T + \langle (C^{NN})^{-1} \rangle \sigma_{IJK}^N, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $\langle \rangle$ обозначает интегральное осреднение по ячейке сетки, σ_{IJK}^N и ε_{IJK}^T — значения соответствующих функций в центре ячейки. После этого проводится обратное преобразование к виду (2.18), что дает коэффициенты конечно-разностной схемы Лебедева для горизонтальной границы разрыва коэффициентов $z = 0$. Коэффициенты для плоскостей разрыва, ориентированных по осям $x-z$ и $y-z$, определяются аналогично. При этом тензор C_{IJK} коэффициентов схемы Лебедева, получаемый на границе двух изотропных сред по формуле (2.19), уже не обладает структурой (2.3), соответствующей тензору жесткости для изотропной среды, а имеет вид, соответствующий анизотропной среде (2.2).

Определение коэффициентов плотности ρ_{IJK} в 1–3 конечно-разностных уравнениях схемы Лебедева (2.17) на компоненты u_x , u_y , u_z вектора скорости смещения повторяет их определение для схемы на сдвинутых сетках: коэффициент плотности берется как среднее арифметическое по соответствующим прилегающим ячейкам сетки.

2.3 Сравнительный анализ вычислительной эффективности конечно-разностных схем на частично разнесенных сетках

Все три конечно-разностные схемы на сдвинутых сетках для системы уравнений упругости (2.1) — схема на сдвинутых сетках (2.8), схема Лебедева (2.17) и схема на повернутых сетках (2.14) — являются явными по времени и условно устойчивыми.

Конечно-разностную схему называют явной, когда значения сеточных функций на следующем по времени слое выражаются явными формулами через значения этих функций на текущем слое. При этом не требуется дополнительного решения систем линейных уравнений, которые появляются в неявных конечно-разностных схемах. Явная конечно-разностная схема напрямую дает алгоритм решения соответствующей конечно-разностной начально-краевой задачи: значения сеточных функций для начального момента времени известны и пересчитываются со слоя на слой по времени по явным формулам.

Конечно-разностную схему называют условно устойчивой, когда для ее устойчивости необходимо выполнение отношения на пространственные и временные шаги сетки схемы — условия устойчивости. Отыскание непосредственного ви-

да этого условия для конечно-разностной схемы необходимо для практического использования алгоритма на основе этой схемы, это первый шаг в сравнительном анализе вычислительной эффективности нескольких конечно-разностных схем.

Второй шаг в сравнительном анализе вычислительной эффективности — определение численной дисперсии конечно-разностной схемы [Lisitsa, Vishnevskiy, 2010]. Решение дифференциальной задачи (2.1) — недиспергирующее, фазовые и групповые скорости плоских волн не зависят от их частоты, а зависят только от направления распространения (для анизотропной среды). Однако скорости распространения плоских волн для конечно-разностной задачи от частоты зависят и отличаются от скоростей плоских волн дифференциальной задачи. Соответственно, численная дисперсия конечно-разностной схемы — это количественная зависимость скорости распространения решения конечно-разностных уравнений в виде плоской волны от частоты и направления. Знание численной дисперсии схемы позволяет выбрать шаги сетки, обеспечивающие необходимую точность аппроксимации решения дифференциальной задачи. Поэтому знание численной дисперсии конечно-разностной схемы необходимо при практической реализации разработанного на этой схеме алгоритма, а также в сравнительном анализе вычислительной эффективности нескольких конечно-разностных схем.

Нужно отметить, что нет необходимости отдельно определять свойства схемы на сдвинутых сетках: для однородной изотропной среды множество узлов конечно-разностной схемы Лебедева распадается на четыре подмножества таким образом, что на каждом из этих подмножеств решение не зависит от значений в узлах сетки остальных подмножеств, а каждая из четырех редуцированных на эти подмножества конечно-разностных схем, полученных из схемы Лебедева, совпадает со схемой на сдвинутых сетках. Вследствие этого условие устойчивости схемы Лебедева и ее численная дисперсия совпадают с условием устойчивости и численной дисперсией схемы на сдвинутых сетках.

2.3.1 Условие устойчивости схемы Лебедева

Для вывода условия устойчивости схемы Лебедева (2.17) проверяется необходимое спектральное условие устойчивости — критерий Неймана [Годунов, Рябенский, 1973]. Для этого требуется найти решение системы конечно-разностных

уравнений в виде плоской волны:

$$\begin{aligned}\vec{w}_{IJK}^N &= \vec{w}_0 \exp(i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)) = \\ &= \vec{w}_0 \lambda^N \exp(i(-k_x I h_x - k_y J h_y - k_z K h_z)), \quad (2.20)\end{aligned}$$

где $\vec{w}_{IJK}^N = ([u_x], [u_y], [u_z], [\sigma_{xx}], [\sigma_{yy}], [\sigma_{zz}], [\sigma_{yz}], [\sigma_{xz}], [\sigma_{xy}])_{IJK}^N$ — вектор из компонент вектора скорости смещения и тензора напряжений, $\vec{w}_0$ — вектор поляризации, $\lambda = \exp(i\omega\tau)$ — спектральный параметр, ω — частота, $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ — волновой вектор, а k_x, k_y, k_z — пространственные частоты.

Выражение (2.20) подставляется в конечно-разностную схему Лебедева (2.17) для однородной среды и после упрощений полученная система уравнений принимает вид:

$$\left\{ \begin{aligned} &\lambda^N \exp(-i(k_x I h_x + k_y J h_y + k_z K h_z)) \times \\ &\times \begin{pmatrix} \rho\Lambda & 0 & 0 & K_x & 0 & 0 & 0 & K_z & K_y \\ 0 & \rho\Lambda & 0 & 0 & K_y & 0 & K_z & 0 & K_x \\ 0 & 0 & \rho\Lambda & 0 & 0 & K_z & K_y & K_x & 0 \end{pmatrix} \vec{w}_0 = 0, \\ &(IJK) \in \Omega_u^L, N = \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, \dots, \\ &\lambda^N \exp(-i(k_x I h_x + k_y J h_y + k_z K h_z)) \times \\ &\times \begin{pmatrix} K_x & 0 & 0 & \Lambda s_{11} & \Lambda s_{12} & \Lambda s_{13} & \Lambda s_{14} & \Lambda s_{15} & \Lambda s_{16} \\ 0 & K_y & 0 & \Lambda s_{12} & \Lambda s_{22} & \Lambda s_{23} & \Lambda s_{24} & \Lambda s_{25} & \Lambda s_{26} \\ 0 & 0 & K_z & \Lambda s_{13} & \Lambda s_{23} & \Lambda s_{33} & \Lambda s_{34} & \Lambda s_{35} & \Lambda s_{36} \\ 0 & K_z & K_y & \Lambda s_{14} & \Lambda s_{24} & \Lambda s_{34} & \Lambda s_{44} & \Lambda s_{45} & \Lambda s_{46} \\ K_z & 0 & K_x & \Lambda s_{15} & \Lambda s_{25} & \Lambda s_{35} & \Lambda s_{45} & \Lambda s_{55} & \Lambda s_{56} \\ K_y & K_x & 0 & \Lambda s_{16} & \Lambda s_{26} & \Lambda s_{36} & \Lambda s_{46} & \Lambda s_{56} & \Lambda s_{66} \end{pmatrix} \vec{w}_0 = 0, \\ &(IJK) \in \Omega_\sigma^L, N = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \right.$$

где s_{ij} - компоненты тензора C^{-1} ,

$$\Lambda = \frac{\lambda^{1/2} - \lambda^{-1/2}}{\tau}, \quad (2.21)$$

$$K_x = -\frac{\exp(-ik_x h_x/2) - \exp(ik_x h_x/2)}{h_x} = \frac{2i}{h_x} \sin(k_x h_x/2), \quad (2.22)$$

K_y и K_z — аналогично K_x . $\vec{K} = (K_x, K_y, K_z)$ - конечно-разностный волновой вектор. Значения K_x, K_y, K_z — чисто мнимые, их квадраты — отрицательные вещественные числа.

Экспонента $\exp(-i(k_x I h_x + k_y J h_y + k_z K h_z))$ чисто мнимого аргумента в левой части выражений в ноль не обращается, ее можно сократить, и система уравнений принимает вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccccc} \rho\Lambda & 0 & 0 & K_x & 0 & 0 & 0 & K_z & K_y \\ 0 & \rho\Lambda & 0 & 0 & K_y & 0 & K_z & 0 & K_x \\ 0 & 0 & \rho\Lambda & 0 & 0 & K_z & K_y & K_x & 0 \\ \hline K_x & 0 & 0 & \Lambda s_{11} & \Lambda s_{12} & \Lambda s_{13} & \Lambda s_{14} & \Lambda s_{15} & \Lambda s_{16} \\ 0 & K_y & 0 & \Lambda s_{12} & \Lambda s_{22} & \Lambda s_{23} & \Lambda s_{24} & \Lambda s_{25} & \Lambda s_{26} \\ 0 & 0 & K_z & \Lambda s_{13} & \Lambda s_{23} & \Lambda s_{33} & \Lambda s_{34} & \Lambda s_{35} & \Lambda s_{36} \\ 0 & K_z & K_y & \Lambda s_{14} & \Lambda s_{24} & \Lambda s_{34} & \Lambda s_{44} & \Lambda s_{45} & \Lambda s_{46} \\ K_z & 0 & K_x & \Lambda s_{15} & \Lambda s_{25} & \Lambda s_{35} & \Lambda s_{45} & \Lambda s_{55} & \Lambda s_{56} \\ K_y & K_x & 0 & \Lambda s_{16} & \Lambda s_{26} & \Lambda s_{36} & \Lambda s_{46} & \Lambda s_{56} & \Lambda s_{66} \end{array} \right) \vec{w}_0 = 0. \quad (2.23)$$

Для существования нетривиального решения требуется, чтобы определитель матрицы системы (2.23) был равен нулю. Раскрытие определителя и разложение полученного выражения на множители дает конечно-разностное дисперсионное соотношение для схемы Лебедева:

$$D_L(\omega, K_x, K_y, K_z) = C\Lambda(\Lambda^2 - V_{qP}^2(\frac{\vec{K}}{|\vec{K}|})\mathbf{K}) \times \\ \times (\Lambda^2 - V_{qSV}^2(\frac{\vec{K}}{|\vec{K}|})\mathbf{K}) \times (\Lambda^2 - V_{qSH}^2(\frac{\vec{K}}{|\vec{K}|})\mathbf{K}) = 0, \quad (2.24)$$

где $\mathbf{K} = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2$ — отрицательная величина, так как K_x, K_y, K_z — чисто мнимые. Вывод конечно-разностного дисперсионного соотношения (2.24) совпадает

с выводом дисперсионного соотношения для системы уравнений упругости (2.6), их записи совпадают с точностью до замены ω на Λ , k_x на K_x , k_y на K_y , k_z на K_z .

По спектральному критерию устойчивости Неймана, для устойчивости конечно-разностной схемы необходимо, чтобы для решения в виде плоской волны (2.20) для любых k_x , k_y , k_z выполнялось условие $|\lambda| \leq 1$. Для проверки этого рассматривается одна из частей дисперсионного соотношения (2.24), заключенная в скобки, где V — скорость квазипродольных или квазипоперечных волн в определенном направлении

$$\Lambda^2 - V^2 \mathbf{K} = 0.$$

Λ заменяется через λ по формуле (2.21)

$$\left(\frac{\lambda^{1/2} - \lambda^{-1/2}}{\tau}\right)^2 - V^2 \mathbf{K} = 0$$

и переписывается как квадратное уравнение относительно λ

$$\lambda^2 + (\tau^2 V^2 |\mathbf{K}| - 2)\lambda + 1 = 0.$$

По теореме Виета $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, следовательно неравенство $|\lambda| \leq 1$ будет нарушено, если дискриминант уравнения больше нуля, и автоматически выполнено, если дискриминант меньше или равен нулю, что дает условие

$$\tau^2 V^2 |\mathbf{K}| (\tau^2 V^2 |\mathbf{K}| - 4) \leq 0$$

или

$$\tau^2 V^2 |\mathbf{K}| \leq 4.$$

Подстановка значения $|\mathbf{K}|$ по формуле (2.22) дает неравенство

$$\tau^2 V_{qSV,qSH,qP}^2(\theta, \phi) \left| \left(\frac{2i}{h_x} \sin \frac{k_x h_x}{2} \right)^2 + \left(\frac{2i}{h_y} \sin \frac{k_y h_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{2i}{h_z} \sin \frac{k_z h_z}{2} \right)^2 \right| \leq 4$$

или

$$\tau^2 V_{qSV,qSH,qP}^2(\theta, \phi) \left(\frac{1}{h_x^2} \sin^2 \frac{k_x h_x}{2} + \frac{1}{h_y^2} \sin^2 \frac{k_y h_y}{2} + \frac{1}{h_z^2} \sin^2 \frac{k_z h_z}{2} \right) \leq 1,$$

которое должно выполняться для любых k_x, k_y, k_z , следовательно

$$\tau^2 V_{qSV, qSH, qP}^2(\theta, \phi) \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2} \right) \leq 1.$$

Здесь V_{qSV}, V_{qSH}, V_{qP} — фазовые скорости двух квазипоперечных и квазипродольной волн в среде из дисперсионного соотношения (2.6), θ и ϕ — углы, определяющие направление в сферической системе координат.

Чтобы это условие удовлетворялось всегда, в левой части берется максимум скорости по всем типам волн и всем возможным направлениям распространения, что в результате дает условие на шаги схемы по пространству и времени τ, h_x, h_y, h_z , обеспечивающее устойчивость:

$$\tau \sqrt{\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2}} \max_{\theta \in [0; \pi], \phi \in [0; 2\pi]} V_{qP}(\theta, \phi) \leq 1. \quad (2.25)$$

Максимум в левой части неравенства берется по всем трем скоростям распространения волн (квазипродольной и двум квазипоперечным), но V_{qSV} и V_{qSH} всегда меньше V_{qP} , поэтому в выражении (2.25) остается только максимум по V_{qP} . Для изотропной среды с одинаковыми пространственными шагами дискретизации сетки по осям X, Y и Z ($h_x = h_y = h_z = h$) условие устойчивости упрощается:

$$\tau \leq \frac{h}{V_P \sqrt{3}}$$

и совпадает с условием Куранта–Фридрихса–Леви.

Из теории известно, что выполнение спектрального критерия Неймана — это необходимое, но недостаточное условие устойчивости схемы. Однако численные эксперименты показывают, что выполнение условия для конечно-разностной схемы Лебедева (2.25) обеспечивает ее устойчивость. Условие устойчивости схемы Лебедева получено.

2.3.2 Численная дисперсия схемы Лебедева

Численная дисперсия — зависимость скорости распространения плоской волны от частоты и направления. Анализ численной дисперсии схемы Лебедева проводится при условии равенства пространственных шагов схемы $h_x = h_y = h_z$. Для

определения скоростей распространения плоских волн конечно-разностной задачи рассматривается плоская волна вида:

$$\begin{aligned}\vec{w}_{IJK}^N &= \vec{w}_0 \exp(i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)) = \\ &= \vec{w}_0 \exp(i(\omega \tau N - k_x I h_x - k_y J h_y - k_z K h_z)),\end{aligned}\quad (2.26)$$

$$\vec{w}_{IJK}^N = \vec{w}_0 \exp(i(\omega \tau N - k_x I h_x - k_y J h_y - k_z K h_z)),\quad (2.27)$$

которая подставляется в конечно-разностную схему Лебедева (2.17). Подобно изложенному выше, получается дисперсионное соотношение схемы Лебедева:

$$\begin{aligned}C\left(\frac{2}{\tau} \sin\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)\right) \times \left(\left(\frac{2}{\tau} \sin\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)\right)^2 - V_{qP}^2 |\vec{K}^L|^2\right) \times \\ \times \left(\left(\frac{2}{\tau} \sin\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)\right)^2 - V_{qSV}^2 |\vec{K}^L|^2\right) \times \left(\left(\frac{2}{\tau} \sin\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)\right)^2 - V_{qSH}^2 |\vec{K}^L|^2\right) = 0,\end{aligned}$$

где $\vec{K}^L = \vec{K}^L(\vec{k})$ — конечно-разностный волновой вектор, зависящий от волнового вектора $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}K_x^L &= 2h^{-1} \sin(k_x h/2), \\ K_y^L &= 2h^{-1} \sin(k_y h/2), \\ K_z^L &= 2h^{-1} \sin(k_z h/2).\end{aligned}\quad (2.28)$$

Скорости плоских волн конечно-разностной системы уравнений находятся из дисперсионного соотношения следующим образом:

$$V^{fd}(\vec{k}) = \frac{\omega(\vec{k})}{|\vec{k}|} = \frac{1}{|\vec{k}|} \frac{2}{\tau} \arcsin\left(\frac{\tau}{2} V |\vec{K}^L(\vec{k})|\right),\quad (2.29)$$

где V может быть скоростью квазипродольных и квазипоперечных волн.

В уравнении (2.29) проводится обезразмеривающая замена переменных:

$$\tau = \psi^L \frac{h}{\sqrt{3} V_P}, \quad h = \frac{2\pi}{N|k|}, \quad V_P = \frac{V}{\gamma},$$

где $0 < \psi^L \leq 1$ — числа Куранта схемы Лебедева, $0 < \gamma \leq 1$ — отношение скорости V к максимальной скорости продольных волн V_P в среде, величина N обрат-

но пропорциональна пространственному шагу сетки и соответствует отношению числа шагов сетки к длине плоской волны (2.27). С использованием формул для коэффициентов (2.28) в новых переменных скорость плоской волны V^{fd} для схемы Лебедева выражается формулой:

$$V^{fd} = V \frac{N\sqrt{3}}{\pi\gamma\psi^L} \arcsin \left[\frac{\gamma\psi^L}{\sqrt{3}} \sqrt{\sin^2(\frac{k_x h}{2}) + \sin^2(\frac{k_y h}{2}) + \sin^2(\frac{k_z h}{2})} \right].$$

И после перехода к сферической системе координат $k_x = |k| \cos \theta \cos \phi$, $k_y = |k| \cos \theta \sin \phi$, $k_z = |k| \sin \theta$ скорость плоской волны V^{fd} выражается формулой:

$$V^{fd} = V \frac{N\sqrt{3}}{\pi\gamma\psi^L} \arcsin \left[\frac{\gamma\psi^L}{\sqrt{3}} \sqrt{P} \right], \quad (2.30)$$

где

$$P = \sin^2\left(\frac{\pi \cos \theta \cos \phi}{N}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi \cos \theta \sin \phi}{N}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi \sin \theta}{N}\right).$$

Формула (2.30) выражает численную дисперсию схемы Лебедева в удобном для анализа виде. Скорость плоских волн конечно-разностной задачи V^{fd} зависит от шагов схемы (через число точек на длину волны N и параметра ψ^L) и от направления распространения плоской волны (через скорость распространения плоских волн дифференциальной задачи V , параметр γ и параметр P). Для определения максимальной ошибки требуется найти максимальное отклонение V^{fd} от V по всем возможным направлениям. Для анизотропной среды оно зависит от шагов сетки и параметров анизотропии, а в предположении изотропности среды — только от шагов сетки, и можно получить общую формулу.

В предположении изотропности среды скорость плоских волн зависит от направления только через параметр P . Несложно показать, что $P \leq (\pi/N)^2$, следовательно $V^{fd} \leq V$, и максимальное отклонение V_{fd} от V достигается в минимумах подкоренного выражения $P(N, \theta, \phi)$ по θ, ϕ . Исследование тригонометрического подкоренного выражения P показывает, что этот минимум достигается при $\theta = 0$, $\phi = (\pi n)/2, n = 0, 1, 2, 3$ или $\theta = \pi/2 + \pi n, n = 0, 1$, ϕ — произвольный, что соответствует направлениям координатных осей в положительную и отрицательную стороны. Это позволяет вывести максимальную относительную ошибку в скоро-

стях плоских волн конечно-разностной схемы Лебедева в сравнении со скоростями соответствующих плоских волн системы уравнений упругости:

$$\begin{aligned}\epsilon^L &= 1 - \frac{V^{fd}(\theta)}{V} \leq 1 - \frac{V^{fd}(0)}{V} = 1 - \frac{N\sqrt{3}}{\pi\gamma\psi^L} \arcsin \left[\frac{\gamma\psi^L}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{3} (\gamma\psi^L)^2 \right) \left(\frac{\pi}{N} \right)^2 + O\left(\frac{1}{N^4}\right).\end{aligned}\tag{2.31}$$

Из выражения (2.31) видно, что относительная ошибка ϵ^L обратно пропорциональна квадрату количества точек схемы на длину волны N , что согласуется со вторым порядком аппроксимации схемы Лебедева.

2.3.3 Условие устойчивости схемы на повернутых сетках

Исследование устойчивости конечно-разностной схемы на повернутых сетках осуществляется аналогично исследованию устойчивости схемы Лебедева. В конечно-разностную схему (2.14) подставляется плоская волна вида (2.20), что приводит к системе уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} &\lambda^N \exp(i(k_x I h_x + k_y J h_y + k_z K h_z)) \times \\ &\times \left(\begin{array}{ccc|cccc} \rho\Lambda & 0 & 0 & K_x & 0 & 0 & 0 & K_z & K_y \\ 0 & \rho\Lambda & 0 & 0 & K_y & 0 & K_z & 0 & K_x \\ 0 & 0 & \rho\Lambda & 0 & 0 & K_z & K_y & K_x & 0 \end{array} \right) \vec{w}_0 = 0, \\ &(IJK) \in \Omega_u^R, N = \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, \dots, \\ &\lambda^N \exp(i(k_x I h_x + k_y J h_y + k_z K h_z)) \times \\ &\times \left(\begin{array}{ccc|cccc} K_x & 0 & 0 & \Lambda s_{11} & \Lambda s_{12} & \Lambda s_{13} & \Lambda s_{14} & \Lambda s_{15} & \Lambda s_{16} \\ 0 & K_y & 0 & \Lambda s_{12} & \Lambda s_{22} & \Lambda s_{23} & \Lambda s_{24} & \Lambda s_{25} & \Lambda s_{26} \\ 0 & 0 & K_z & \Lambda s_{13} & \Lambda s_{23} & \Lambda s_{33} & \Lambda s_{34} & \Lambda s_{35} & \Lambda s_{36} \\ 0 & K_z & K_y & \Lambda s_{14} & \Lambda s_{24} & \Lambda s_{34} & \Lambda s_{44} & \Lambda s_{45} & \Lambda s_{46} \\ K_z & 0 & K_x & \Lambda s_{15} & \Lambda s_{25} & \Lambda s_{35} & \Lambda s_{45} & \Lambda s_{55} & \Lambda s_{56} \\ K_y & K_x & 0 & \Lambda s_{16} & \Lambda s_{26} & \Lambda s_{36} & \Lambda s_{46} & \Lambda s_{56} & \Lambda s_{66} \end{array} \right) \vec{w}_0 = 0, \\ &(IJK) \in \Omega_\sigma^R, N = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \right.$$

где Λ , K_x , K_y , K_z представляются в виде:

$$\begin{aligned}\Lambda &= \frac{\lambda^{1/2} - \lambda^{-1/2}}{\tau}, \\ K_x &= 2i \frac{\sin(k_x h_x / 2) \cos(k_y h_y / 2) \cos(k_z h_z / 2)}{h_x}, \\ K_y &= 2i \frac{\cos(k_x h_x / 2) \sin(k_y h_y / 2) \cos(k_z h_z / 2)}{h_y}, \\ K_z &= 2i \frac{\cos(k_x h_x / 2) \cos(k_y h_y / 2) \sin(k_z h_z / 2)}{h_z}.\end{aligned}\tag{2.32}$$

После сокращения на экспоненту получается система уравнений, совпадающая с системой уравнений (2.23) для определенных выше Λ , K_x , K_y , K_z , и далее дисперсионное соотношение, совпадающее с дисперсионным соотношением схемы Лебедева (2.24). Отличие заключается в том, что входящие в запись K_x , K_y , K_z определены по формулам (2.32) для схемы на повернутых сетках и по формулам (2.22) для схемы Лебедева.

Дальнейшее повторение рассуждений дает условие устойчивости схемы на повернутых сетках:

$$\tau^2 V^2 \mathbf{K} = \tau^2 V_{qSV, qSH, qP}^2(\theta, \phi) |K_x^2 + K_y^2 + K_z^2| \leq 4.$$

Так как K_x , K_y , K_z — чисто мнимые, их квадраты — отрицательные числа, а сумма квадратов берется по модулю.

Исследование выражения $|K_x^2 + K_y^2 + K_z^2|$ на максимум по всем возможным k_x , k_y , k_z дает соотношение на шаги схемы по времени и пространству:

$$\frac{\tau}{\min[h_x, h_y, h_z]} \max_{\theta \in [0; \pi], \phi \in [0; 2\pi]} V_{qP}(\theta, \phi) \leq 1.\tag{2.33}$$

Или для изотропной среды и совпадающих шагов сетки по пространству:

$$\tau \leq \frac{h}{V_P}.$$

Это неравенство совпадает с условием Куранта-Фридрихса-Леви для схемы на повернутых сетках.

2.3.4 Численная дисперсия схемы на повернутых сетках

Численная дисперсия схемы на сдвинутых сетках исследуется при условии равенства пространственных шагов схемы $h_x = h_y = h_z$ аналогично исследованию численной дисперсии для схемы Лебедева. Для определения скоростей плоских волн конечно-разностной задачи рассматривается плоская волна вида (2.27), которая подставляется в конечно-разностную схему (2.14).

Используя алгоритм рассуждения для построения дисперсионного соотношения схемы Лебедева, выводится дисперсионное соотношение схемы на повернутых сетках, совпадающее с дисперсионным соотношением схемы Лебедева в терминах волновых векторов:

$$C\left(\frac{2}{\tau} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right) \times \left(\left(\frac{2}{\tau} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right)^2 - V_{qP}^2 |\vec{K}^R|^2\right) \times \\ \times \left(\left(\frac{2}{\tau} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right)^2 - V_{qSV}^2 |\vec{K}^R|^2\right) \times \left(\left(\frac{2}{\tau} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right)^2 - V_{qSH}^2 |\vec{K}^R|^2\right) = 0, \quad (2.34)$$

где $\vec{K}^R = \vec{K}^R(\vec{k})$ — конечно-разностный волновой вектор схемы на повернутых сетках, зависящий от волнового вектора $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} K_x^R &= 2h^{-1} \sin(k_x h/2) \cos(k_y h/2) \cos(k_z h/2), \\ K_y^R &= 2h^{-1} \cos(k_x h/2) \sin(k_y h/2) \cos(k_z h/2), \\ K_z^R &= 2h^{-1} \cos(k_x h/2) \cos(k_y h/2) \sin(k_z h/2). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Скорости распространения конечно-разностных плоских волн схемы на повернутых сетках находятся из дисперсионного соотношения (2.34):

$$V^{fd}(\vec{k}) = \frac{\omega(\vec{k})}{|\vec{k}|} = \frac{1}{|\vec{k}|} \frac{2}{\tau} \arcsin\left(\frac{\tau}{2} V |\vec{K}^R(\vec{k})|\right), \quad (2.36)$$

где V может быть скоростью квазипродольных и квазипоперечных волн.

Затем в уравнении выполняется обезразмеривающая замена переменных:

$$\tau = \psi^R \frac{h}{V_P}, h = \frac{2\pi}{N|k|}, V_P = \frac{V}{\gamma},$$

где $0 < \psi^R \leq 1$ — числа Куранта схемы на повернутых сетках, $0 < \gamma \leq 1$ — отноше-

ние скорости V к максимальной скорости продольных волн V_P в среде, величина N обратно пропорциональна пространственному шагу сетки и соответствует отношению числа шагов сетки на длину плоской волны (2.27). Также производится переход к сферической системе координат. Тогда с использованием формул для коэффициентов (2.35), в новых переменных скорость плоской волны для схемы на повернутых сетках выражается:

$$V^{fd} = V \frac{N}{\pi \gamma \psi^R} \arcsin \left[\gamma \psi^R \sqrt{P} \right],$$

$$P = \sin^2\left(\frac{\pi \cos \theta \cos \phi}{N}\right) \cos^2\left(\frac{\pi \cos \theta \sin \phi}{N}\right) \cos^2\left(\frac{\pi \sin \theta}{N}\right) +$$

$$+ \cos^2\left(\frac{\pi \cos \theta \cos \phi}{N}\right) \sin^2\left(\frac{\pi \cos \theta \sin \phi}{N}\right) \cos^2\left(\frac{\pi \sin \theta}{N}\right) +$$

$$+ \cos^2\left(\frac{\pi \cos \theta \cos \phi}{N}\right) \cos^2\left(\frac{\pi \cos \theta \sin \phi}{N}\right) \sin^2\left(\frac{\pi \sin \theta}{N}\right).$$

Аналогично выполненному для схемы Лебедева, максимум отклонения V^{fd} от V находится для изотропной среды. Анализ выражения P показывает, что оно не превосходит $(\pi/N)^2$, следовательно, выполняется неравенство $V^{fd} \leq V$, а минимум подкоренного выражения $P(N, \theta, \phi)$ достигается при $\theta = \arcsin(1/\sqrt{3}) + (\pi n)/2, n = 0, 1, \phi = \pi/4 + (\pi m)/2, m = 0, 1, 2, 3$. Следовательно, максимальную относительную ошибку для конечно-разностных скоростей схемы на повернутых сетках можно выразить формулой:

$$\epsilon^R = 1 - \frac{N}{\pi \gamma \psi^R} \arcsin \left[\gamma \psi^R \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{N\sqrt{3}}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{N\sqrt{3}}\right) \right] =$$

$$= \frac{7}{18} \left(1 - \frac{3}{7} (\gamma \psi^R)^2\right) \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 + O\left(\frac{1}{N^4}\right). \quad (2.37)$$

2.3.5 Сравнительный анализ вычислительной эффективности в трехмерном случае

Все три конечно-разностные схемы на частично разнесенных сетках для системы уравнений упругости (2.1) — схема на сдвинутых сетках (2.8), схема на повернутых сетках (2.14) и схема Лебедева (2.17) — это явные, условно-корректные конечно-разностные схемы сквозного счета (во всей вычислительной области вычисления ведутся по единым формулам). Схема на сдвинутых сетках отличается от двух других тем, что аппроксимирует уравнения упругости только для изотропной

среды. Две другие схемы — схема Лебедева и схема на повернутых сетках — аппроксимируют систему уравнений упругости в случае произвольной анизотропной среды. Важным для практического применения различием между ними является объем вычислительных ресурсов, необходимых для расчетов с использованием этих конечно-разностных схем с близкой по значению разницей между решением конечно-разностной задачи и решением исходной дифференциальной задачи.

Три названные конечно-разностные схемы отличаются требуемыми для вычислений компьютерными ресурсами. Во-первых, это требуемая для вычислений оперативная память компьютера. Этим определяются размеры конечно-разностной сетки (больше размеры — больше требуемая оперативная память), которую можно использовать с доступным аппаратным обеспечением, т.е. точность расчетов на имеющемся оборудовании. Если смотреть с другой стороны, то задавшись необходимым уровнем численной дисперсии определить шаги и размеры сетки и необходимую для вычислений память компьютера. Также у оперативной памяти компьютера есть пропускная способность — объем данных, которые за единицу времени могут быть переданы из памяти процессору для вычислений, а результаты переданы обратно в оперативную память. При конечно-разностных вычислениях для пересчета со слоя по времени на следующий весь объем данных задачи передается из оперативной памяти процессору, по формулам рассчитываются значения на следующем слое и данные передаются обратно в память. Поэтому пропускная способность памяти появляется ограничением и на время счета. Для «памятезависимых» вычислений, к которым относятся конечно-разностные, время счета линейно зависит от объема необходимой для хранения данных памяти.

Во-вторых, различается количество операций сложения-вычитания, умножения и деления, необходимое для выполнения расчетов. В современных компьютерах на сложение-вычитание уходит 1-3 такта процессора, на умножение 2-5, но векторные операции позволяют производить несколько простых операций одновременно, процессор содержит несколько ядер, которые выполняют операции независимо. В результате количество элементарных операций сложно связать со временами расчетов конкретных программных реализаций конечно-разностных алгоритмов при проведении вычислений на конкретных компьютерах, поэтому в данной работе подсчета операций не производится. Отдельно надо выделить деление —

на него тратится около 40 тактов процессора. Поэтому формулы вычислений перестраиваются заменой деления умножением на заранее вычисленную обратную величину.

Схема на сдвинутых сетках и схема Лебедева обладают одинаковым условием устойчивости и одинаковой зависимостью численной дисперсии от шага дискретизации среды. Следовательно, одинаковое значение ошибки в вычислениях при использовании этих схем достигается при равных шагах дискретизации по пространству и по времени, откуда следует соотношение необходимой для вычислений памяти. На ячейку схемы на сдвинутых сетках приходится 3 значения смещений, 6 значений тензора напряжений и 3 значения параметров среды λ , μ , ρ : суммарно 12 значений. На ячейку схемы Лебедева приходится 3 значения смещений в четырех точках, 6 значений тензора напряжений в четырех точках, 21 значение тензора жесткости и 1 значение плотности: суммарно 58 значений. Поэтому соотношение необходимой для вычислений с одинаковой ошибкой относительно решения дифференциальной задачи памяти компьютера для этих схем представляется:

$$\frac{Mem^V}{Mem^L} = \frac{12}{58} \approx \frac{1}{5}, \quad (2.38)$$

где индексы V и L обозначают принадлежность значения схеме на сдвинутых сетках и схеме Лебедева соответственно, т.е. решение системы уравнений упругости (2.1) для трехмерной изотропной среды потребует в пять раз меньше памяти компьютера, если использовать схему на сдвинутых сетках, а не схему Лебедева. Из-за ограниченной пропускной способности оперативной памяти, можно предположить, что необходимое для вычислений при помощи схемы на сдвинутых сетках процессорное время тоже будет в пять раз меньше.

Сравнение вычислительной эффективности схемы Лебедева и схемы на повернутых сетках основывается на анализе их численной дисперсии. Максимальные относительные ошибки в скорости распространения конечно-разностных плоских волн схемы Лебедева (2.31) и схемы на повернутых сетках (2.37) уравниваются, что дает соотношение на пространственные шаги схем, соотношение на их временные шаги и в результате — соотношение необходимой оперативной памяти и количества вычислительных арифметических операций.

Сравнение выражений для максимальной относительной ошибки в конечно-

разностных скоростях ϵ^L для схемы Лебедева (2.31):

$$\epsilon^L = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{18}(\gamma\psi^L)^2\right)\left(\frac{\pi}{N}\right)^2,$$

и максимальной относительной ошибки ϵ^R для схемы на повернутых сетках (2.37):

$$\epsilon^R = \left(\frac{7}{18} - \frac{1}{6}(\gamma\psi^R)^2\right)\left(\frac{\pi}{N}\right)^2$$

показывает, что относительные ошибки приблизительно совпадают, если количество шагов схемы на длину волны N для двух схем удовлетворяет соотношению:

$$\frac{N^R}{\sqrt{3}} \leq N^L \leq \frac{N^R}{\sqrt{2}}. \quad (2.39)$$

Соотношение значений N^R и N^L , при котором достигается точное равенство, зависит от произведения числа Куранта ψ на отношение скорости рассматриваемой плоской волны к скорости продольных волн γ , но неравенство выполняется для любых ψ и γ . Отсюда следует соотношение на пространственные шаги конечно-разностных схем, обеспечивающее приблизительно равный уровень ошибки в скоростях плоских волн:

$$h^R\sqrt{2} \leq h^L \leq h^R\sqrt{3}. \quad (2.40)$$

При выполнении этого соотношения схему Лебедева и схему на сдвинутых сетках можно считать эквивалентными по уровню ошибки численного решения и сравнивать требования к оперативной памяти, необходимой для практической реализации схем.

На ячейку схемы на повернутых сетках приходится 3 значения скоростей смещений, 6 значений коэффициентов тензора напряжений, 21 значение коэффициентов тензора жесткости и 1 значение плотности: суммарно 31 значение. На ячейку схемы Лебедева приходится 3 значения скоростей смещений в четырех точках, 6 значений коэффициентов тензора напряжений в четырех точках, 21 значение тензора жесткости и 1 значение плотности: суммарно 58 значений. Тогда для конечно-разностного моделирования физической области фиксированных размеров при помощи схемы Лебедева и схемы на повернутых сетках с одинаковой ошибкой в скорости распространения плоских волн соотношение на требуемую па-

мать получается из соотношения на пространственные шаги схем (2.40):

$$\frac{31}{58} \times \frac{1}{3\sqrt{3}} \times Mem^R \leq Mem^L \leq \frac{31}{58} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \times Mem^R,$$

что приблизительно аппроксимируется как:

$$\frac{1}{3} \times Mem^R \leq Mem^L \leq \frac{2}{3} \times Mem^R. \quad (2.41)$$

Следовательно, компьютерная память, необходимая для использования схемы Лебедева, составляет от одной до двух третей памяти для использования схемы на повернутых сетках.

На практике при расчете волновых полей для глубин порядка 2-5 км разброс скоростей в скоростной модели — отношение максимальной скорости продольных волн модели к минимальной скорости поперечных волн — обычно 5 или больше. Это значение есть обратное к параметру γ в формулах (2.31) и (2.37), т.е. $\gamma \leq 0.2$ — относительно малое значение. Вследствие этого $(\gamma\psi^L)^2$ в формулах (2.31) и (2.37) — это малость второго порядка, членом, ее содержащим, можно пренебречь, и соотношение (2.40) представить в виде формулы:

$$h^R \sqrt{\frac{7}{3}} \approx h^L.$$

В результате чего формула (2.41) в применении к типовым практическим задачам упрощается до:

$$\frac{1}{2} \times Mem^R \approx Mem^L.$$

Для решения таких геофизических задач выигрыш по памяти при использовании схемы Лебедева, по сравнению со схемой на повернутых сетках, составляет около 50%.

2.3.6 Сравнительный анализ вычислительной эффективности в двумерном случае

Отдельно следует сравнить вычислительную эффективность схемы Лебедева и схемы на повернутых сетках для двумерного пространства. Saenger показал [Saenger et al., 2000], что в двумерном пространстве схема на повернутых сетках

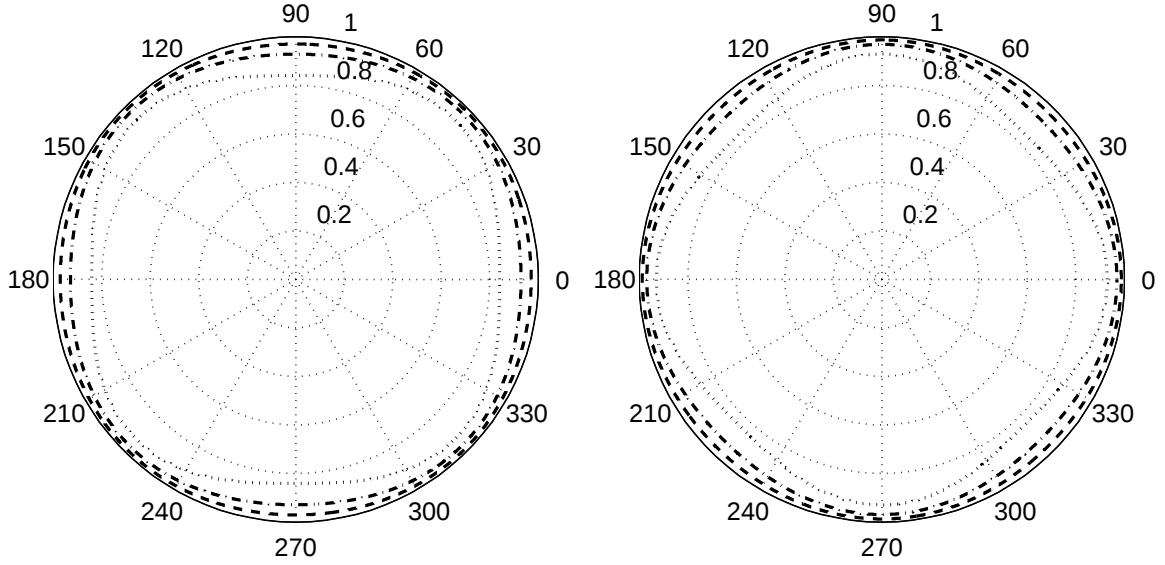


Рисунок 2.4 – Отношение скорости распространения конечно-разностных плоских волн к скоростям плоских волн исходного дифференциального уравнения V^{fd}/V в зависимости от направления: для схемы Лебедева (слева), для схемы на повернутых сетках (справа). Сплошная линия — скорость дифференциального уравнения $V/V = 1$ независимо от направления. Для конечно-разностных схем $\gamma = 1$, $\psi^{L,R} = 0.5$. Число точек на длину волны для схемы Лебедева: пунктирная линия $N = 7$, штрих-пунктирная линия $N = 4.5$, точечная линия $N = 3$. Число точек на длину волны для схемы на повернутых сетках совпадает с $N\sqrt{2}$ схемы Лебедева.

эквивалентна схеме на сдвинутых сетках, повернутой на 45° (что дало название схеме — «на повернутых сетках») с пространственным шагом, уменьшенным в $\sqrt{2}$ раз. В то же время, аналогично трехмерному случаю, условие устойчивости и численно дисперсионные свойства схемы Лебедева и схемы на сдвинутых сетках в двумерной постановке совпадают. Следовательно, можно записать соотношение на шаги схем, строго обеспечивающее одинаковую численную дисперсию (одинаковую ошибку в скоростях распространения плоских волн конечно-разностной задачи) в виде равенства:

$$h^L = h^R \sqrt{2}, \quad (2.42)$$

где h^L — шаг по пространству схемы Лебедева, h^R — шаг схемы на повернутых сетках.

На графиках зависимости скорости распространения конечно-разностных плоских волн при выполнении условия равенства численной дисперсии (2.42) для схемы Лебедева и схемы на повернутых сетках от направления для нескольких

значений отношения длины волны к пространственному шагу сетки N (Рисунок 2.4) видно, что скорости для схемы на повернутых сетках совпадают со скоростями схемы Лебедева, повернутыми на 45° .

Соотношение (2.42) показывает, что для обеспечения одинакового уровня численной дисперсии сетка схемы на повернутых сетках должна содержать вдвое больше ячеек (так как $(\sqrt{2})^2 = 2$), чем сетка схемы Лебедева. Одна ячейка схемы на повернутых сетках требует хранения 2 значений смещений, 3 значений тензора напряжений, 6 параметров тензора жесткости и 1 значения плотности, суммарно 12 значений. Поскольку ячеек схемы на повернутых сетках должно быть вдвое больше, это значение удваивается: для схемы на повернутых сетках требуется хранение 24 чисел на две ячейки. Ячейка схемы Лебедева требует хранения 2 значений смещений в двух точках, 3 значений тензора напряжений в двух точках, 6 параметров тензора жесткости и 1 значения плотности: суммарно для схемы Лебедева требуется хранение 17 чисел на ячейку. Откуда следует соотношение на требуемую память компьютера:

$$\frac{Mem^L}{Mem^R} = \frac{17}{24}. \quad (2.43)$$

Следовательно, численное решение системы уравнений упругости (в двумерной постановке) при помощи конечно-разностной схемы Лебедева требует примерно на 30% меньше компьютерной памяти, чем решение с использованием схемы на повернутых сетках.

Условия устойчивости схем для двумерного случая, аналогичные (2.25), (2.33) [Lisitsa, Vishnevskiy, 2010], и соотношение (2.42) дают условие на временные шаги схем:

$$\tau^L = \tau^R. \quad (2.44)$$

Следовательно, число шагов по времени для обеих схем совпадает. Подсчет вычислительных операций, необходимых для проведения одного шага по времени для схемы на повернутых сетках, дает 38 операций умножения и 74 операции сложения на две ячейки. Для схемы Лебедева требуется 38 операций умножения и 42 операции сложения на ячейку. Таким образом, для обеспечения одного уровня численной дисперсии в двумерном случае использование схемы Лебедева требует равного со схемой на повернутых сетках количества арифметических операций

умножения и меньшего количества операций сложения.

2.4 Нефизичные решения конечно-разностных уравнений схемы Лебедева и схемы на повернутых сетках

Практическое применение схемы Лебедева (2.17) и схемы на повернутых сетках (2.14) выявило наличие у конечно-разностных уравнений нефизичных решений — т.е. таких решений конечно-разностной задачи, которые не соответствуют никаким решениям исходной дифференциальной задачи для системы уравнений динамической теории упругости (2.1) в анизотропном случае [Лисица, Вишневский, 2011; Lisitsa, Vishnevskiy, 2011]. Это значит, что возникает вопрос к аппроксимации системы уравнений упругости конечно-разностными уравнениями схемы Лебедева и схемы на повернутых сетках. В случае изотропной среды и схемы на сдвинутых сетках (2.8) подобного свойства у решений конечно-разностных уравнений нет.

Результаты исследования методом дифференциального приближения [Шокин, Яненко, 1985; Лисица, Вишневский, 2011; Lisitsa, Vishnevskiy, 2011] показывают, что схема Лебедева и схема на повернутых сетках аппроксимируют более широкие, относительно системы уравнений упругости, системы уравнений с количеством характеристик, вчетверо превышающим количество характеристик системы уравнений упругости. Часть плоских волн этих систем соответствует плоским волнам исходной системы уравнений упругости, а остальные плоские волны являются нефизичными, «паразитными», волнами, которым никакие волны исходной системы уравнений упругости не соответствуют. Требование равенства нулю нефизичных решений приводит к классической аппроксимации системы уравнений упругости конечно-разностными уравнениями.

2.4.1 Нефизичные решения системы уравнений схемы Лебедева

Для получения первого дифференциального приближения конечно-разностной схемы Лебедева (2.17) систему уравнений упругости (2.1) удобно пред-

ставить в матричном виде для сокращения записи рассматриваемых формул:

$$\begin{pmatrix} \rho E_3 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} - \sum_{r=1}^3 \begin{pmatrix} 0 & A_r^* \\ A_r & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_r} \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

где $S = C^{-1}$, E_3 — единичная матрица размерности 3, направление дифференцирования x_1 соответствует направлению x , $x_2 = y$, $x_3 = z$, $u = \vec{u} = (u_x, u_y, u_z)^T$, $\sigma = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy})^T$, $g = (g_{xx}, g_{yy}, g_{zz}, g_{yz}, g_{xz}, g_{xy})^T$, а матрицы A_r не зависят от параметров среды и задаются формулами:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Или в более компактной форме:

$$\left(\hat{S} \frac{\partial}{\partial t} - \hat{A}_1 \frac{\partial}{\partial x} - \hat{A}_2 \frac{\partial}{\partial y} - \hat{A}_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_u \\ g_\sigma \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Конечно-разностная схема Лебедева (2.17) также представляется в матричной форме:

$$\begin{cases} \rho E_3 D_t[u]_{IJK}^{n+1/2} - \sum_{r=1}^3 A_r^* D_r^L[\sigma]_{IJK}^{n+1/2} = 0, (IJK) \in \Omega_u^L, \\ SD_t[\sigma]_{IJK}^n - \sum_{r=1}^3 A_r D_r^L[u]_{IJK}^n = g_{IJK}, (IJK) \in \Omega_\sigma^L. \end{cases} \quad (2.47)$$

Поскольку первое дифференциальное приближение находится для однородной среды, константы S и E_3 совпадают с определенными выше, а индексы при коэффициентах среды ρ и S можно опустить. Символом g_{IJK} обозначается вектор $(g_{xx}, g_{yy}, g_{zz}, g_{yz}, g_{xz}, g_{xy})_{IJK}^T$. Запись, в которой оператор конечно-разностного диф-

ференцирования применяется к вектору, обозначает вектор, в котором этот оператор конечно-разностного дифференцирования независимо применяется к каждой компоненте исходного вектора.

Множества индексов узлов сетки схемы Лебедева Ω_u^L и Ω_σ^L разбиваются на непересекающиеся подмножества (в двумерном случае подобное разбиение введено В.И. Лебедевым [Лебедев, 1964]):

$$\Omega_u^L = M_u^{L_1} \cup M_u^{L_2} \cup M_u^{L_3} \cup M_u^{L_4},$$

$$M_u^{L_1} = \{(IJK) \in \Omega_u^L | I \notin \mathbf{Z}, J \in \mathbf{Z}, K \in \mathbf{Z}\},$$

$$M_u^{L_2} = \{(IJK) \in \Omega_u^L | I \in \mathbf{Z}, J \notin \mathbf{Z}, K \in \mathbf{Z}\},$$

$$M_u^{L_3} = \{(IJK) \in \Omega_u^L | I \in \mathbf{Z}, J \in \mathbf{Z}, K \notin \mathbf{Z}\},$$

$$M_u^{L_4} = \{(IJK) \in \Omega_u^L | I \notin \mathbf{Z}, J \notin \mathbf{Z}, K \notin \mathbf{Z}\},$$

$$\Omega_\sigma^L = M_\sigma^{L_1} \cup M_\sigma^{L_2} \cup M_\sigma^{L_3} \cup M_\sigma^{L_4},$$

$$M_\sigma^{L_1} = \{(IJ) \in \Omega_\sigma^L | I \in \mathbf{Z}, J \in \mathbf{Z}, J \in \mathbf{Z}\},$$

$$M_\sigma^{L_2} = \{(IJ) \in \Omega_\sigma^L | I \notin \mathbf{Z}, J \notin \mathbf{Z}, J \in \mathbf{Z}\},$$

$$M_\sigma^{L_3} = \{(IJ) \in \Omega_\sigma^L | I \notin \mathbf{Z}, J \in \mathbf{Z}, J \notin \mathbf{Z}\},$$

$$M_\sigma^{L_4} = \{(IJ) \in \Omega_\sigma^L | I \in \mathbf{Z}, J \notin \mathbf{Z}, J \notin \mathbf{Z}\}.$$

В узлах $M_u^{L_i}$ определяются сеточные функции $u^i = (u_x^i, u_y^i, u_z^i)^T$, соответствующие скоростям смещений, а в узлах $M_\sigma^{L_i}$ — сеточные функции $\sigma_i = (\sigma_{xx}^i, \sigma_{yy}^i, \sigma_{zz}^i, \sigma_{yz}^i, \sigma_{xz}^i, \sigma_{xy}^i)^T$, соответствующие компонентам тензора напряжений. Тогда схему Лебедева (2.17) можно представить в виде системы конечно-разностных

уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \rho E D_t [u^1]_{IJK}^{n+1/2} - A_1^* D_x^L [\sigma^1]_{IJK}^{n+1/2} - A_2^* D_x^L [\sigma^2]_{IJK}^{n+1/2} - A_3^* D_z^L [\sigma^3]_{IJK}^{n+1/2} = 0, \\
 (IJK) \in M_u^{L_1} \\
 \rho E D_t [u^2]_{IJK}^{n+1/2} - A_1^* D_x^L [\sigma^2]_{IJK}^{n+1/2} - A_2^* D_x^L [\sigma^1]_{IJK}^{n+1/2} - A_3^* D_z^L [\sigma^4]_{IJK}^{n+1/2} = 0, \\
 (IJK) \in M_u^{L_2} \\
 \rho E D_t [u^3]_{IJK}^{n+1/2} - A_1^* D_x^L [\sigma^3]_{IJK}^{n+1/2} - A_2^* D_x^L [\sigma^4]_{IJK}^{n+1/2} - A_3^* D_z^L [\sigma^1]_{IJK}^{n+1/2} = 0, \\
 (IJK) \in M_u^{L_3} \\
 \rho E D_t [u^4]_{IJK}^{n+1/2} - A_1^* D_x^L [\sigma^4]_{IJK}^{n+1/2} - A_2^* D_x^L [\sigma^3]_{IJK}^{n+1/2} - A_3^* D_z^L [\sigma^2]_{IJK}^{n+1/2} = 0, \\
 (IJK) \in M_u^{L_4} \\
 S D_t [\sigma^1]_{IJK}^n - A_1 D_x^L [u^1]_{IJK}^n - A_2 D_x^L [u^2]_{IJK}^n - A_3 D_z^L [u^3]_{IJK}^n = (g_\sigma^1)_{IJK}^n, \\
 (IJK) \in M_\sigma^{L_1} \\
 S D_t [\sigma^2]_{IJK}^n - A_1 D_x^L [u^2]_{IJK}^n - A_2 D_x^L [u^1]_{IJK}^n - A_3 D_z^L [u^4]_{IJK}^n = (g_\sigma^1)_{IJK}^n, \\
 (IJK) \in M_\sigma^{L_2} \\
 S D_t [\sigma^3]_{IJK}^n - A_1 D_x^L [u^3]_{IJK}^n - A_2 D_x^L [u^4]_{IJK}^n - A_3 D_z^L [u^1]_{IJK}^n = (g_\sigma^1)_{IJK}^n, \\
 (IJK) \in M_\sigma^{L_3} \\
 S D_t [\sigma^4]_{IJK}^n - A_1 D_x^L [u^4]_{IJK}^n - A_2 D_x^L [u^3]_{IJK}^n - A_3 D_z^L [u^2]_{IJK}^n = (g_\sigma^1)_{IJK}^n, \\
 (IJK) \in M_\sigma^{L_4}
 \end{array} \right. \quad (2.48)$$

которая эквивалентна системе (2.17) и отличается только перестановкой компонент сеточных функций.

Для получения первого дифференциального приближения системы (2.48) сеточные переменные заменяются рядами Тейлора соответствующих непрерывных функций в предположении малости шага сетки, а затем отбрасываются все члены рядов порядка малости выше первой, что дает следующую систему уравнений:

$$\left(\left(\begin{pmatrix} \rho E_{12} & 0 \\ 0 & \mathbf{S} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{r=1}^3 \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A}_r^* \\ \mathbf{A}_r & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_r} \right) \begin{pmatrix} U \\ \Sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ G_\sigma \end{pmatrix} + O(\tau^2, h_x^2, h_z^2), \quad (2.49)$$

где $U = ((u^1)^T, (u^2)^T, (u^3)^T, (u^4)^T)^T$, $\Sigma = ((\sigma^1)^T, (\sigma^2)^T, (\sigma^3)^T, (\sigma^4)^T)^T$, $G_\sigma = ((g_\sigma^1)^T, (g_\sigma^2)^T, (g_\sigma^3)^T, (g_\sigma^4)^T)^T$, а матрицы коэффициентов $\mathbf{S}$ и $\mathbf{A}_r$ это:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & A_2 & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3 \\ A_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где S , A_i берутся из системы уравнений (2.45). Точные выражения для членов второго и более высоких порядков по τ , h_x и h_z не требуются.

Для исследования свойств полученной системы уравнений и построения ее дисперсионного соотношения выполняется замена переменных:

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_3 & -E_3 & -E_3 & E_3 \\ E_3 & E_3 & -E_3 & -E_3 \\ E_3 & -E_3 & E_3 & -E_3 \\ E_3 & E_3 & E_3 & E_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u^{--} \\ u^{+-} \\ u^{-+} \\ u^{++} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

и

$$\begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \sigma^3 \\ \sigma^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_6 & -E_6 & -E_6 & E_6 \\ E_6 & E_6 & -E_6 & -E_6 \\ E_6 & -E_6 & E_6 & -E_6 \\ E_6 & E_6 & E_6 & E_6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma^{--} \\ \sigma^{+-} \\ \sigma^{-+} \\ \sigma^{++} \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

в результате которой система уравнений (2.49) расщепляется на четыре независи-

МЫХ:

$$\begin{aligned}
\left(\hat{S} \frac{\partial}{\partial t} - \hat{A}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \hat{A}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \hat{A}_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} u^{--} \\ \sigma^{--} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ g_{\sigma}^{--} \end{pmatrix}, \\
\left(\hat{S} \frac{\partial}{\partial t} - \hat{A}_1 \frac{\partial}{\partial x} - \hat{A}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \hat{A}_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} u^{+-} \\ \sigma^{+-} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ g_{\sigma}^{+-} \end{pmatrix}, \\
\left(\hat{S} \frac{\partial}{\partial t} - \hat{A}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \hat{A}_2 \frac{\partial}{\partial y} - \hat{A}_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} u^{-+} \\ \sigma^{-+} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ g_{\sigma}^{-+} \end{pmatrix}, \\
\left(\hat{S} \frac{\partial}{\partial t} - \hat{A}_1 \frac{\partial}{\partial x} - \hat{A}_2 \frac{\partial}{\partial y} - \hat{A}_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} u^{++} \\ \sigma^{++} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ g_{\sigma}^{++} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Дисперсионное соотношение для системы (2.52), следовательно дисперсионное соотношение и для системы (2.49), легко выводится из дисперсионного соотношения (2.6):

$$\begin{aligned}
D^L(\omega, k_x, k_y, k_z) &= D(\omega, k_x, -k_y, -k_z) D(\omega, k_x, k_y, -k_z) \times \\
&\times D(\omega, k_x, -k_y, k_z) D(\omega, k_x, k_y, k_z), \tag{2.53}
\end{aligned}$$

первый множитель дисперсионного соотношения соответствует первому уравнению (2.52), второй — второму и т.д. Из рассмотрения дисперсионного соотношения (2.53) следует, что у системы (2.49) характеристик вчетверо больше, чем характеристик у системы уравнений упругости (2.1), т.е. у системы уравнений (2.49) есть двадцать четыре решения в виде плоских волн, шесть из которых для (u^{++}, σ^{++}) совпадают с решениями в виде плоских волн системы уравнений упругости, остальные восемнадцать — по шесть для (u^{--}, σ^{--}) , (u^{+-}, σ^{+-}) и (u^{-+}, σ^{-+}) — нефизичные решения, артефакты, возникающие вследствие некорректной конечно-разностной аппроксимации исходных уравнений. Кривые медленности (фазовых и групповых скоростей) для этих паразитных решений совпадают с кривыми медленности для истинных решений u^{++} и σ^{++} , отраженными: относительно плоскости $z = 0$ для индекса $-+$, относительно плоскости $y = 0$ для индекса $+-$ и относительно плоскости $x = 0$ для индекса $--$.

Для сходимости конечно-разностного решения схемы Лебедева к решению

системы уравнений упругости (2.1) необходимо, чтобы нефизичные решения были малы и с уменьшением шага схемы по пространству сходились к нулю. Этого можно достичь специальной аппроксимацией начальных условий и правой части системы уравнений упругости. Решение задачи Коши с нулевыми начальными данными для системы упругости (2.1) совпадает с решением задачи (2.52) при условии на правые части:

$$g_{\sigma}^{++} = g_{\sigma}, g_{\sigma}^{+-} = 0, g_{\sigma}^{-+} = 0, g_{\sigma}^{--} = 0,$$

где g_{σ} — правая часть системы (2.1). Для получения условия на правые части схемы Лебедева выполняется преобразование, обратное преобразованию (2.50)-(2.51). В результате для правых частей схемы Лебедева получается условие:

$$g_{\sigma}^1 = g_{\sigma}^2 = g_{\sigma}^3 = g_{\sigma}^4 = \frac{1}{4}g_{\sigma},$$

а нулевые начальные данные аппроксимируются точно. При выполнении этих условий схема Лебедева (2.17) аппроксимирует задачу Коши с нулевыми начальными данными для системы уравнений упругости (2.1) в классическом определении аппроксимации.

2.4.2 Нефизичные решения системы уравнений схемы на повернутых сетках

Конечно-разностная схема на повернутых сетках (2.14) также аппроксимирует более широкую систему дифференциальных уравнений, чем исходная система уравнений упругости (2.1), что следует из анализа ее первого дифференциального приближения.

Для получения первого дифференциального приближения схемы на повернутых сетках она переписывается в матричной форме:

$$\begin{cases} \rho E_3 D_t[u]_{IJK}^{n+1/2} - \sum_{r=1}^3 A_r^* D_r^R[\sigma]_{IJK}^{n+1/2} = 0, (IJK) \in \Omega_u^R, \\ S D_t[\sigma]_{IJK}^n - \sum_{r=1}^3 A_r D_r^R[u]_{IJK}^n = g_{IJK}, (IJK) \in \Omega_{\sigma}^R, \end{cases} \quad (2.54)$$

где все параметры совпадают с соответствующими параметрами в матричной форме схемы Лебедева (2.47), изменяется только оператор численного дифференциро-

вания по пространству.

Множество узлов сетки схемы на повернутых сетках Ω_u^R и Ω_σ^R разбивается на непересекающиеся подмножества:

$$\begin{aligned}\Omega_u^R &= M_u^{R_1} \cup M_u^{R_2} \cup M_u^{R_3} \cup M_u^{R_4}, \\ M_u^{R_1} &= \{(IJK) \in \Omega_u^R | I = 2L_1 + \frac{1}{2} + l, J = 2L_2 + \frac{1}{2} + l, K = 2L_3 + \frac{1}{2} + l\}, \\ M_u^{R_2} &= \{(IJK) \in \Omega_u^R | I = 2L_1 - \frac{1}{2} + l, J = 2L_2 + \frac{1}{2} + l, K = 2L_3 + \frac{1}{2} + l\}, \\ M_u^{R_3} &= \{(IJK) \in \Omega_u^R | I = 2L_1 + \frac{1}{2} + l, J = 2L_2 - \frac{1}{2} + l, K = 2L_3 + \frac{1}{2} + l\}, \\ M_u^{R_4} &= \{(IJK) \in \Omega_u^R | I = 2L_1 + \frac{1}{2} + l, J = 2L_2 + \frac{1}{2} + l, K = 2L_3 - \frac{1}{2} + l\}, \\ \Omega_\sigma^R &= M_\sigma^{R_1} \cup M_\sigma^{R_2} \cup M_\sigma^{R_3} \cup M_\sigma^{R_4}, \\ M_\sigma^{R_1} &= \{(IJK) \in \Omega_\sigma^R | I = 2L_1 + l, J = 2L_2 + l, K = 2L_3 + l\}, \\ M_\sigma^{R_2} &= \{(IJK) \in \Omega_\sigma^R | I = 2L_1 + l + 1, J = 2L_2 + l, K = 2L_3 + l\}, \\ M_\sigma^{R_3} &= \{(IJK) \in \Omega_\sigma^R | I = 2L_1 + l, J = 2L_2 + l + 1, K = 2L_3 + l\}, \\ M_\sigma^{R_4} &= \{(IJK) \in \Omega_\sigma^R | I = 2L_1 + l, J = 2L_2 + l, K = 2L_3 + l + 1\},\end{aligned}$$

где $L_1, L_2, L_3, l \in \mathbf{Z}$. В узлах $M_u^{R_i}$ определяются сеточные функции $u^i = (u_x^i, u_y^i, u_z^i)^T$, соответствующие скоростям смещений, а в узлах $M_\sigma^{R_i}$, — сеточные функции $\sigma^i = (\sigma_{xx}^i, \sigma_{yy}^i, \sigma_{zz}^i, \sigma_{yz}^i, \sigma_{xz}^i, \sigma_{xy}^i)^T$, соответствующие компонентам тензора напряжений.

Операторы конечно-разностного дифференцирования (2.13) преобразуются для новых сеточных функций:

$$\begin{aligned}D_x[f^{p_1}, f^{p_2}, f^{p_3}, f^{p_4}]_{IJK}^N &= \frac{1}{4} \frac{(f^{p_1})_{I+1/2, J+1/2, K+1/2}^N - (f^{p_1})_{I-1/2, J-1/2, K-1/2}^N}{h_x} + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{(f^{p_2})_{I+1/2, J+1/2, K-1/2}^N - (f^{p_2})_{I-1/2, J-1/2, K+1/2}^N}{h_x} + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{(f^{p_3})_{I+1/2, J-1/2, K+1/2}^N - (f^{p_3})_{I-1/2, J+1/2, K-1/2}^N}{h_x} + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{(f^{p_4})_{I+1/2, J-1/2, K-1/2}^N - (f^{p_4})_{I-1/2, J+1/2, K+1/2}^N}{h_x}.\end{aligned}\tag{2.55}$$

D_y и D_z получаются аналогично, перестановкой индексов I, J и K .

С использованием операторов (2.55) схема на повернутых сетках (2.54) при-

нимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \rho E_3 D_t[u^1]_{IJK}^{n+1/2} - A_1^* D_x[\sigma^1, \sigma^4, \sigma^3, \sigma^2]_{IJK}^{n+1/2} - A_2^* D_y[\sigma^1, \sigma^2, \sigma^4, \sigma^3]_{IJK}^{n+1/2} \\
 \quad - A_3^* D_z[\sigma^1, \sigma^3, \sigma^2, \sigma^4]_{IJK}^{n+1/2} = 0, (IJK) \in M_u^{R^1}, \\
 \rho E_3 D_t[u^2]_{IJK}^{n+1/2} - A_1^* D_x[\sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^1]_{IJK}^{n+1/2} - A_2^* D_y[\sigma^2, \sigma^1, \sigma^3, \sigma^4]_{IJK}^{n+1/2} \\
 \quad - A_3^* D_z[\sigma^2, \sigma^4, \sigma^1, \sigma^3]_{IJK}^{n+1/2} = 0, (IJK) \in M_u^{R^2}, \\
 \rho E_3 D_t[u^3]_{IJK}^{n+1/2} - A_1^* D_x[\sigma^3, \sigma^2, \sigma^1, \sigma^4]_{IJK}^{n+1/2} - A_2^* D_y[\sigma^3, \sigma^4, \sigma^2, \sigma^1]_{IJK}^{n+1/2} \\
 \quad - A_3^* D_z[\sigma^3, \sigma^1, \sigma^4, \sigma^2]_{IJK}^{n+1/2} = 0, (IJK) \in M_u^{R^3}, \\
 \rho E_3 D_t[u^4]_{IJK}^{n+1/2} - A_1^* D_x[\sigma^4, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3]_{IJK}^{n+1/2} - A_2^* D_y[\sigma^4, \sigma^3, \sigma^1, \sigma^2]_{IJK}^{n+1/2} \\
 \quad - A_3^* D_z[\sigma^4, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^1]_{IJK}^{n+1/2} = 0, (IJK) \in M_u^{R^4}, \\
 SD_t[\sigma^1]_{IJK}^n - A_1 D_x[u^1, u^4, u^3, u^2]_{IJK}^n - A_2 D_y[u^1, u^2, u^4, u^3]_{IJK}^n \\
 \quad - A_3 D_z[u^1, u^3, u^2, u^4]_{IJK}^n = (g_\sigma^1)_{IJK}^n, (IJK) \in M_\sigma^{R^1}, \\
 SD_t[\sigma^2]_{IJK}^n - A_1 D_x[u^2, u^3, u^4, u^1]_{IJK}^n - A_2 D_y[u^2, u^1, u^3, u^4]_{IJK}^n \\
 \quad - A_3 D_z[u^2, u^4, u^1, u^3]_{IJK}^n = (g_\sigma^2)_{IJK}^n, (IJK) \in M_\sigma^{R^2}, \\
 SD_t[\sigma^3]_{IJK}^n - A_1 D_x[u^3, u^2, u^1, u^4]_{IJK}^n - A_2 D_y[u^3, u^4, u^2, u^1]_{IJK}^n \\
 \quad - A_3 D_z[u^3, u^1, u^4, u^2]_{IJK}^n = (g_\sigma^3)_{IJK}^n, (IJK) \in M_\sigma^{R^3}, \\
 SD_t[\sigma^4]_{IJK}^n - A_1 D_x[u^4, u^1, u^2, u^3]_{IJK}^n - A_2 D_y[u^4, u^3, u^1, u^2]_{IJK}^n \\
 \quad - A_3 D_z[u^4, u^2, u^3, u^1]_{IJK}^n = (g_\sigma^4)_{IJK}^n, (IJK) \in M_\sigma^{R^4}.
 \end{array} \right. \quad (2.56)$$

Разложением в ряд Тейлора формул (2.55) легко показать, что

$$\begin{aligned}
 D_x[f^{p_1}, f^{p_2}, f^{p_3}, f^{p_4}]_{IJK}^N &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial f^{p_1}}{\partial x} + \frac{\partial f^{p_2}}{\partial x} + \frac{\partial f^{p_3}}{\partial x} + \frac{\partial f^{p_4}}{\partial x} \right) + \\
 &+ \frac{1}{4} \frac{h_y}{h_x} \left(\frac{\partial f^{p_1}}{\partial y} + \frac{\partial f^{p_2}}{\partial y} + \frac{\partial f^{p_3}}{\partial y} + \frac{\partial f^{p_4}}{\partial y} \right) + \\
 &+ \frac{1}{4} \frac{h_z}{h_x} \left(\frac{\partial f^{p_1}}{\partial z} + \frac{\partial f^{p_2}}{\partial z} + \frac{\partial f^{p_3}}{\partial z} + \frac{\partial f^{p_4}}{\partial z} \right) + O(h_x^2, h_z^2).
 \end{aligned}$$

Аналогичные формулы для D_y и D_z получаются путем перестановки индексов. В результате получается первое дифференциальное приближение системы конечно-

разностных уравнений (2.56):

$$\left(\left(\begin{pmatrix} \rho E_{12} & 0 \\ 0 & \mathbf{S} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{r=1}^3 \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A}_r^* \\ \mathbf{A}_r & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_r} \right) \times \right. \\ \left. \times \begin{pmatrix} U \\ \Sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ G_\sigma \end{pmatrix} + O(\tau^2, h_x^2, h_y^2, h_z^2), \quad (2.57)$$

где матрица $\mathbf{S}$ и обозначения те же, что и для дифференциального приближения схемы Лебедева (2.49), а матрицы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ следующие:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{h_x}{4} \begin{pmatrix} B_1 + B_2 + B_3 & B_1 - B_2 - B_3 & B_1 - B_2 + B_3 & B_1 + B_2 - B_3 \\ B_1 - B_2 - B_3 & B_1 + B_2 + B_3 & B_1 + B_2 - B_3 & B_1 - B_2 + B_3 \\ B_1 - B_2 + B_3 & B_1 + B_2 - B_3 & B_1 + B_2 + B_3 & B_1 - B_2 - B_3 \\ B_1 + B_2 - B_3 & B_1 - B_2 + B_3 & B_1 - B_2 - B_3 & B_1 + B_2 + B_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \frac{h_y}{4} \times \begin{pmatrix} B_1 + B_2 + B_3 & -B_1 + B_2 + B_3 & -B_1 + B_2 - B_3 & B_1 + B_2 - B_3 \\ -B_1 + B_2 + B_3 & B_1 + B_2 + B_3 & B_1 + B_2 - B_3 & -B_1 + B_2 - B_3 \\ -B_1 + B_2 - B_3 & B_1 + B_2 - B_3 & B_1 + B_2 + B_3 & -B_1 + B_2 + B_3 \\ B_1 + B_2 - B_3 & -B_1 + B_2 - B_3 & -B_1 + B_2 + B_3 & B_1 + B_2 + B_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \frac{h_z}{4} \times \begin{pmatrix} B_1 + B_2 + B_3 & -B_1 + B_2 + B_3 & B_1 - B_2 + B_3 & -B_1 - B_2 + B_3 \\ -B_1 + B_2 + B_3 & B_1 + B_2 + B_3 & -B_1 - B_2 + B_3 & B_1 - B_2 + B_3 \\ B_1 - B_2 + B_3 & -B_1 - B_2 + B_3 & B_1 + B_2 + B_3 & -B_1 + B_2 + B_3 \\ -B_1 - B_2 + B_3 & B_1 - B_2 + B_3 & -B_1 + B_2 + B_3 & B_1 + B_2 + B_3 \end{pmatrix},$$

где $B_r = \frac{1}{h_r} A_r, r = 1, 2, 3$.

Для определения свойств полученной системы выполняется замена переменных:

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_3 & E_3 & E_3 & E_3 \\ -E_3 & E_3 & -E_3 & E_3 \\ -E_3 & -E_3 & E_3 & E_3 \\ E_3 & -E_3 & -E_3 & E_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u^0 \\ u^{13} \\ u^{23} \\ u^{12} \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

и

$$\begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \sigma^3 \\ \sigma^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_6 & E_6 & E_6 & E_6 \\ -E_6 & E_6 & -E_6 & E_6 \\ -E_6 & -E_6 & E_6 & E_6 \\ E_6 & -E_6 & -E_6 & E_6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma^0 \\ \sigma^{13} \\ \sigma^{23} \\ \sigma^{12} \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

в результате система распадается на четыре независимых:

$$\begin{aligned}
\left(\hat{S} \frac{\partial}{\partial t} - \hat{A}_1 \frac{\partial}{\partial x} - \hat{A}_2 \frac{\partial}{\partial y} - \hat{A}_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} u^0 \\ \sigma^0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ g_\sigma^0 \end{pmatrix}, \\
\left(\hat{S} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{h_x}{h_z} \hat{A}_3 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{h_z}{h_x} \hat{A}_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} u^{13} \\ \sigma^{13} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ g_\sigma^{13} \end{pmatrix}, \\
\left(\hat{S} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{h_y}{h_z} \hat{A}_3 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{h_z}{h_y} \hat{A}_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} u^{23} \\ \sigma^{23} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ g_\sigma^{23} \end{pmatrix}, \\
\left(\hat{S} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{h_x}{h_y} \hat{A}_2 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{h_y}{h_x} \hat{A}_1 \frac{\partial}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} u^{12} \\ \sigma^{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ g_\sigma^{12} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Дисперсионное соотношение для системы (2.60), таким образом и системы (2.57), получается из дисперсионного соотношения (2.6):

$$\begin{aligned}
D^R(\omega, k_x, k_y, k_z) &= D(\omega, k_x, k_y, k_z) D\left(\omega, \frac{h_z}{h_x} k_z, 0, \frac{h_x}{h_z} k_x\right) \times \\
&\times D\left(\omega, 0, \frac{h_z}{h_y} k_z, \frac{h_y}{h_z} k_y\right) D\left(\omega, \frac{h_y}{h_x} k_y, \frac{h_x}{h_y} k_x, 0\right). \tag{2.61}
\end{aligned}$$

Из дисперсионного соотношения следует, что у системы (2.57) есть двадцать четыре плоских волны — в четыре раза больше, чем у исходной системы уравнений упругости (2.1). Шесть из них для (u^0, σ^0) совпадают с решениями в виде плоских волн системы уравнений упругости, а остальные — по шесть для (u^{13}, σ^{13}) , (u^{23}, σ^{23}) , (u^{12}, σ^{12}) — нефизичные решения, артефакты.

Решение задачи Коши с нулевыми начальными данными для системы упругости (2.1) совпадает с решением задачи (2.60), если:

$$g_\sigma^0 = g_\sigma, g_\sigma^{13} = 0, g_\sigma^{23} = 0, g_\sigma^{12} = 0.$$

Чтобы получить условие на правые части схемы на повернутых сетках, нужно выполнить преобразование, обратное преобразованию (2.58)–(2.59). В результате

правые части аппроксимируются:

$$g_{\sigma}^1 = g_{\sigma}^2 = g_{\sigma}^3 = g_{\sigma}^4 = \frac{1}{4}g_{\sigma},$$

а нулевые начальные данные аппроксимируются точно. При выполнении этих условий схема на повернутых сетках (2.14) аппроксимирует задачу Коши с нулевыми начальными данными для системы уравнений упругости (2.1) в классическом определении аппроксимации.

2.5 Слабоотражающие граничные условия для ограничения целевой области

Практическая реализация расчетов с помощью разработанной конечно-разностной схемы Лебедева невозможна без введения слабоотражающих граничных условий. Исходная дифференциальная задача для системы уравнений упругости (2.1) ставится в бесконечном трехмерном пространстве или в бесконечном полупространстве $z > 0$ трехмерного пространства, а конечно-разностная схема Лебедева конструируется в соответственном бесконечном сеточном пространстве или полупространстве. Поскольку практическое численное решение задачи в неограниченной области невозможно, в бесконечной области выделяется целевая подобласть, в которой распространяются сейсмические волны, являющиеся объектом исследования, и численное решение отыскивается в этой конечной подобласти. Предполагается, что вне целевой области нет источников сейсмического сигнала и от уходящих из целевой области наружу сейсмических волн не возникает существенных отраженных волн, возвращающихся обратно в целевую область. В результате на практике решается задача распространения сейсмических волн в искусственно ограниченной области пространства, и от границы этой области возникают отраженные обратно в целевую область волны, которых в исходной постановке в бесконечном пространстве не было. Такие отраженные волны могут быть достаточно интенсивными, например, если на границе области поставить краевые условия Дирихле (физически соответствующие жестко закрепленной границе) или Неймана (физически соответствующие свободной поверхности), вся энергия падающих волн отражается обратно внутрь целевой области. Эти волны, возникающие из-за ис-

кусственного ограничения вычислительной области, искажают волновую картину в целевой области. Отсюда возникает необходимость построения неотражающих или слабоотражающих граничных условий: падающие на границу вычислительной области волны должны поглощаться на границе (в идеале — полностью) или порождать отраженные внутрь вычислительной области волны достаточно малой амплитуды, относительно амплитуды падающих волн.

Из множества подходов к ограничению целевой области при помощи слабоотражающих граничных условий для начально-краевой задачи для системы уравнений динамической теории упругости на сегодня получил распространение способ, называемый «идеально согласованный слой» (от английского Perfectly Matched Layer или сокращенно PML) [Berenger, 1994]. Ограниченная целевая область волнового процесса (у Беренже — это электромагнитные волны, описываемые системой уравнений Максвелла, здесь — сейсмические волны, описываемые системой уравнений упругости) окружается PML-слоем, в котором уравнения заменяются на другие таким образом, что волны, распространяющиеся в PML-слое, затухают, а отражение волн от границы целевой области и PML-слоя отсутствует. Полученные для PML-слоя уравнения нефизичны, они не описывают реального физического процесса.

Для конечно-разностной аппроксимации полученных уравнений PML-слоя и системы уравнений упругости в целевой области отражения при падении волн из целевой области на границу целевой области и PML-слоя отсутствуют только асимптотически, при стремлении пространственных шагов сетки к нулю. Для фактических расчетов некоторые паразитные отраженные от PML-слоя волны появляются и уходят обратно в целевую область, но их интенсивность можно уменьшить путем увеличения ширины поглощающего слоя: чем больше ширина PML-слоя, тем меньше амплитуда отраженных внутрь области волн. На сегодня слабоотражающий PML-слой хорошо изучен [Collino, Monk, 1998; Collino, Tsogka, 2001]. К достоинствам использования PML-слоев можно отнести простоту их реализации и возможность сделать паразитные отражения сколь угодно малыми путем увеличения ширины поглощающего слоя, причем на практике ширина PML обычно не превышает 5% исходной расчетной области.

В случае анизотропной среды уравнения PML-слоя могут становиться

некорректными [Becache et al., 2003; Becache et al., 2010]. Для некоторых типов анизотропии уравнения PML-слоя допускают существование экспоненциально растущих во времени решений, в этом случае использование PML для вычислений становится невозможным. Одним из способов устранения этого недостатка является модификация PML, называемая «М-PML» (от английского Multiaxial Perfectly Matched Layer) [Meza-Fajardo, Papageorgiou, 2008]. Уравнения в М-PML-слое вводятся иначе, что делает их корректными для анизотропии любого типа: они являются комбинацией уравнений PML и уравнений, в которых вводится поглощение путем добавления в уравнения младших членов [Petrooulos, 2000], с некоторым стабилизирующим параметром. Стабилизирующий параметр подбирается таким образом, что достигается корректность измененных М-PML-уравнений для всех типов анизотропии, в конкретной модели среды, ценой увеличения интенсивности паразитных отражений при той же ширине отражающего слоя [Дмитриев, Лисица, 2011; Дмитриев, Лисица, 2012].

Система уравнений динамической теории упругости, записанная в скоростях–напряжениях (2.1), — это гиперболическая система линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Для построения слабоотражающих граничных условий она переписывается в матричной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \frac{\partial u}{\partial y} + A_3 \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (2.62)$$

Конкретные значения матриц A_1 , A_2 , A_3 пока неважны. В такой форме могут быть представлены любые гиперболические системы линейных дифференциальных уравнений акустики, упругости, Максвелла [Годунов, Роменский, 1998; Гольдин, 2008].

Для введения поглощения в направлении x производится комплексная замена переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\mapsto \left(1 + \frac{d_1(x)}{i\omega}\right) \frac{\partial}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &\mapsto \left(1 + \frac{d_2(x)}{i\omega}\right) \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &\mapsto \left(1 + \frac{d_2(x)}{i\omega}\right) \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

где d_1 и d_2 — функции поглощения, зависящие от x . Параметр d_1 соответствует поглощению вдоль выбранного направления x , а параметр $d_2 = \epsilon d_1$, $0 < \epsilon < 1$ —

поперек и вводится для стабилизации. Эта замена преобразует распространяющиеся волны в затухающие [Berenger, 1994; Meza-Fajardo, Papageorgiou, 2008]. После выполнения обратной замены, с учетом расщепления переменных волнового поля $u = u^1 + u^2$, система уравнений преобразуется в следующую:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^1}{\partial t} + d_1 u^1 - A_1 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u^2}{\partial t} + d_2 u^2 - A_2 \frac{\partial u}{\partial y} + d_2 u^2 - A_3 \frac{\partial u}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Предельными случаями этой системы уравнений являются:

- $d_1 \equiv 0$ и $d_2 \equiv 0$, когда система уравнений (2.64) эквивалентна исходной системе уравнений (2.1);
- $d_2 \equiv 0$, когда система уравнений (2.64) является идеально согласованным слоем PML;
- $d_2 \equiv d_1$ — система (2.64) соответствует поглощению, вводимому добавлением в уравнение младших членов (Sponge Layer).

В практической реализации параметр d_1 задается как степенная функция $d_1(x) = d_0|x - x_0|^N$, где $N = 2$ или 4 , а число d_0 подбирается для обеспечения наилучшего затухания падающих на М-PML волн в зависимости от упругих параметров конкретной среды и ширины М-PML слоя. Параметр d_2 задается как $d_2(x) = \epsilon d_1(x)$, где ϵ — стабилизирующий параметр, который выбирается исходя из упругих параметров конкретной среды, типичные значения лежат в диапазоне 0.01...0.1.

В итоге система уравнений упругости (2.1) для введения поглощения в на-

правлении x преобразуется в систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left(\frac{\partial u_x^1}{\partial t} + d_1(x) u_x^1 \right) = \frac{\sigma_{xx}}{\partial x}, \\ \rho \left(\frac{\partial u_y^1}{\partial t} + d_1(x) u_y^1 \right) = \frac{\sigma_{xy}}{\partial x}, \\ \rho \left(\frac{\partial u_z^1}{\partial t} + d_1(x) u_z^1 \right) = \frac{\sigma_{xz}}{\partial x}, \\ \rho \left(\frac{\partial u_x^2}{\partial t} + d_2(x) u_x^2 \right) = \frac{\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\sigma_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \left(\frac{\partial u_y^2}{\partial t} + d_2(x) u_y^2 \right) = \frac{\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\sigma_{yz}}{\partial z}, \\ \rho \left(\frac{\partial u_z^2}{\partial t} + d_2(x) u_z^2 \right) = \frac{\sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\sigma_{zz}}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^1 \\ \sigma_{yy}^1 \\ \sigma_{zz}^1 \\ \sigma_{yz}^1 \\ \sigma_{xz}^1 \\ \sigma_{xy}^1 \end{pmatrix} + d_1(x) \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^1 \\ \sigma_{yy}^1 \\ \sigma_{zz}^1 \\ \sigma_{yz}^1 \\ \sigma_{xz}^1 \\ \sigma_{xy}^1 \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^2 \\ \sigma_{yy}^2 \\ \sigma_{zz}^2 \\ \sigma_{yz}^2 \\ \sigma_{xz}^2 \\ \sigma_{xy}^2 \end{pmatrix} + d_2(x) \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^2 \\ \sigma_{yy}^2 \\ \sigma_{zz}^2 \\ \sigma_{yz}^2 \\ \sigma_{xz}^2 \\ \sigma_{xy}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

Здесь $u_i = u_i^1 + u_i^2$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^1 + \sigma_{ij}^2$. Правые части g в уравнениях отсутствуют, так как все источники сигнала располагаются в целевой области, а в поглощающем слое их нет. Уравнения М-РМЛ-слоя, описывающие поглощение вдоль направлений y и z , записываются аналогично.

Для построения схемы Лебедева для измененной таким образом системы уравнений упругости (2.1) требуется ввести оператор, аппроксимирующий млад-

шие члены уравнений:

$$M[f]_{IJK}^N = \frac{f_{IJK}^{N+1/2} + f_{IJK}^{N-1/2}}{2} + O(\tau^2).$$

Тогда конечно-разностная схема Лебедева (2.17) для уравнений М-РМЛ-слоя принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{IJK}(D_t[u_x^1]_{IJK}^{n+1/2} + [d_1]_I M[u_x^1]_{IJK}^{n+1/2}) = D_x^L[\sigma_{xx}]_{IJK}^{n+1/2}, \\ \rho_{IJK}(D_t[u_y^1]_{IJK}^{n+1/2} + [d_1]_I M[u_y^1]_{IJK}^{n+1/2}) = D_x^L[\sigma_{xy}]_{IJK}^{n+1/2}, \\ \rho_{IJK}(D_t[u_z^1]_{IJK}^{n+1/2} + [d_1]_I M[u_z^1]_{IJK}^{n+1/2}) = D_x^L[\sigma_{xz}]_{IJK}^{n+1/2}, \\ \rho_{IJK}(D_t[u_x^2]_{IJK}^{n+1/2} + [d_2]_I M[u_x^2]_{IJK}^{n+1/2}) = D_y^L[\sigma_{xy}]_{IJK}^{n+1/2} + D_z^L[\sigma_{xz}]_{IJK}^{n+1/2}, \\ \rho_{IJK}(D_t[u_y^2]_{IJK}^{n+1/2} + [d_2]_I M[u_y^2]_{IJK}^{n+1/2}) = D_y^L[\sigma_{yy}]_{IJK}^{n+1/2} + D_z^L[\sigma_{yz}]_{IJK}^{n+1/2}, \\ \rho_{IJK}(D_t[u_z^2]_{IJK}^{n+1/2} + [d_2]_I M[u_z^2]_{IJK}^{n+1/2}) = D_y^L[\sigma_{yz}]_{IJK}^{n+1/2} + D_z^L[\sigma_{zz}]_{IJK}^{n+1/2}, \\ (IJK) \in \Omega_u^L, \\ \left(\begin{array}{c} D_t[\sigma_{xx}^1]_{IJK}^n \\ D_t[\sigma_{yy}^1]_{IJK}^n \\ D_t[\sigma_{zz}^1]_{IJK}^n \\ D_t[\sigma_{yz}^1]_{IJK}^n \\ D_t[\sigma_{xz}^1]_{IJK}^n \\ D_t[\sigma_{xy}^1]_{IJK}^n \end{array} \right) + [d_1]_I \left(\begin{array}{c} M[\sigma_{xx}^1]_{IJK}^n \\ M[\sigma_{yy}^1]_{IJK}^n \\ M[\sigma_{zz}^1]_{IJK}^n \\ M[\sigma_{yz}^1]_{IJK}^n \\ M[\sigma_{xz}^1]_{IJK}^n \\ M[\sigma_{xy}^1]_{IJK}^n \end{array} \right) = C_{IJK} \left(\begin{array}{c} D_x^L[u_x]_{IJK}^n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_x^L[u_z]_{IJK}^n \\ D_x^L[u_y]_{IJK}^n \end{array} \right), \\ \left(\begin{array}{c} D_t[\sigma_{xx}^2]_{IJK}^n \\ D_t[\sigma_{yy}^2]_{IJK}^n \\ D_t[\sigma_{zz}^2]_{IJK}^n \\ D_t[\sigma_{yz}^2]_{IJK}^n \\ D_t[\sigma_{xz}^2]_{IJK}^n \\ D_t[\sigma_{xy}^2]_{IJK}^n \end{array} \right) + [d_2]_I \left(\begin{array}{c} M[\sigma_{xx}^2]_{IJK}^n \\ M[\sigma_{yy}^2]_{IJK}^n \\ M[\sigma_{zz}^2]_{IJK}^n \\ M[\sigma_{yz}^2]_{IJK}^n \\ M[\sigma_{xz}^2]_{IJK}^n \\ M[\sigma_{xy}^2]_{IJK}^n \end{array} \right) = C_{IJK} \left(\begin{array}{c} 0 \\ D_y^L[u_y]_{IJK}^n \\ D_z^L[u_z]_{IJK}^n \\ D_y^L[u_z]_{IJK}^n + D_z^L[u_y]_{IJK}^n \\ D_z^L[u_x]_{IJK}^n \\ D_y^L[u_x]_{IJK}^n \end{array} \right), \\ (IJK) \in \Omega_\sigma^L. \end{array} \right.$$

Глава 3

Разработка алгоритма, его программная реализация и применение в прикладных задачах

3.1 Разработка алгоритма и его программная реализация

Описанная и исследованная выше конечно-разностная схема Лебедева (2.17) явная, поэтому автоматически реализуется в алгоритме численного решения задачи распространения сейсмических волн в анизотропной среде (это относится также и к схеме на сдвинутых сетках (2.8), и к схеме на повернутых сетках (2.14)). Формулы явной конечно-разностной схемы непосредственно выражают значения схемы на следующем слое по времени через значения на предыдущем, без необходимости привлекать какой-либо дополнительный математический аппарат.

Начальные данные дифференциальной задачи (нулевые) определяют значения переменных конечно-разностной схемы на первом шаге по времени (также нулевые). Далее значения переменных конечно-разностной схемы на каждом следующем слое по времени вычисляются по их значениям на предыдущем слое по явным формулам. Эти действия повторяются до достижения требуемого постановкой задачи слоя конечно-разностной схемы по времени, что соответствует численному решению дифференциальной задачи до требуемого момента времени.

При переходе к практической программной реализации алгоритма возникает следующая особенность. В случае трехмерной среды компьютерная память, требуемая для хранения конечно-разностной сетки во время вычислений, составляет сотни или даже тысячи гигабайт. Вычисления с такими требованиями к памяти в настоящее время можно проводить только на многопроцессорных суперкомпьютерах, в которых есть множество независимых вычислительных процессоров, каждый со своей независимой памятью, и механизмом обмена информацией между процессорами. Отсюда возникает необходимость декомпозиции области вычислений: она некоторым образом делится на части (с перекрытием), расчет в которых

ведется независимо, а недостаток информации на границах сопряжения подобластей, необходимый для продолжения расчетов, восполняется путем обмена информацией между вычислительными процессорами. Причем время этих обменов (пропорциональное их объему) становится дополнительными накладными расходами алгоритма, и его желательно минимизировать.

3.1.1 Декомпозиция расчетной области

Необходимым элементом в практической реализации алгоритма, основанного на конечно-разностном методе, является его распараллеливание с помощью декомпозиции области вычислений. Например, требование к оперативной памяти, необходимой для одного расчета с использованием конечно-разностной схемы Лебедева (2.17), оценивается так. На одну ячейку конечно-разностной схемы Лебедева приходится: 3×4 компонент скоростей смещений, 6×4 компонент тензора напряжений, 21 компонента тензора жесткости и 1 значение плотности — суммарно 58 величин, на хранение каждого из которых в памяти компьютера с одинарной точностью требуется 4 байта. Типичная задача по расчету распространения сейсмических волн требует конечно-разностной сетки около 1000^3 ячеек (как правило, больше по направлениям X и Y и меньше по направлению Z). Общая требуемая для хранения такой сетки память составляет 2.32×10^{11} байт или более 200 гигабайт, без учета дополнительной памяти, требуемой для реализации конечно-разностной схемы в PML-слое. Таким образом, фактическое численное решение задач с такими требованиями к оперативной памяти на современных персональных компьютерах невозможно из-за недостаточного объема оперативной памяти персональных компьютеров. Для выполнения вычислений требуются многопроцессорные суперкомпьютеры с разделенной оперативной памятью достаточного объема, следовательно, требуется распараллеливание алгоритма, т.е. его адаптация для работы на таком компьютере. Распараллеливание осуществляется при помощи декомпозиции вычислительной области [Graves, 1996; Korneev, Vishnevsky et al., 1997; Костин и др., 2011].

Схема на сдвинутых сетках, схема Лебедева и схема на повернутых сетках распараллеливаются просто [Костин и др., 2011]. Если вычислительная область — это параллелепипед ячеек схемы размером $[1..N_x] \times [1..N_y] \times [1..N_z]$, то после одного

шага по времени каждой из этих конечно-разностных схем вычисляются значения во внутренних ячейках $[2..N_x - 1] \times [2..N_y - 1] \times [2..N_z - 1]$, а значения в ячейках на границе области (ячейках, любой из индексов которых равен 1 или максимальному индексу сетки по соответствующему направлению) вычисляются исходя из граничных условий. Распараллеливание алгоритма выполняется декомпозицией области, т.е. ее разделением на подобласти. Эти подобласти не пересекаются, а их объединение совпадает с исходной вычислительной областью. Вычисления в подобластях выполняются независимо. К каждой подобласти добавляется один слой ячеек сетки на тех границах, где подобласть соприкасается с другой подобластью, т.е. граница подобласти не является границей исходной расчетной области. Таким образом эти добавленные ячейки для одной подобласти совпадают в пространстве с некоторыми внутренними точками смежной подобласти. После шага схемы по времени независимо вычисляются значения состояний упругой среды во всех внутренних точках каждой подобласти. После этого значения в ячейках внешних слоев (которые одновременно совпадают с внутренними ячейками некоторой смежной подобласти) определяются при помощи пересылки информации от одной подобласти к другой. Это завершает распараллеливание алгоритма.

На схеме (Рисунок 3.1) графически показан пример декомпозиции расчетной области по направлению X на две подобласти. Исходная область имеет N_x ячеек сетки в направлении X (четное значение). После разрезания в направлении X размеры подобластей составляют $N_x/2$ ячеек сетки, к ним добавляется по одному слою ячеек для перекрытия, в результате чего размеры подобластей в направлении X составляют $N_x/2 + 1$. Слой ячеек $N_x/2$ исходной области пространственно совпадает с внутренним слоем ячеек $N_x/2$ первой подобласти и граничным слоем ячеек 1 второй подобласти. Слой ячеек $N_x/2 + 1$ исходной области пространственно совпадает с граничным слоем ячеек $N_x/2 + 1$ первой подобласти и внутренним слоем ячеек 2 второй подобласти. После выполнения одного шага конечно-разностной схемы независимо в двух подобластях оказываются вычисленными значения во внутренних (белых) ячейках. Значения в ячейках на границе расчетной области (светло-серых) вычисляются из граничных условий. Значения в граничных ячейках на границе сопряжения подобластей (темно-серых) переносятся из внутренних ячеек сопряженной подобласти: внутренний столбец $N_x/2$ первой подобласти пере-

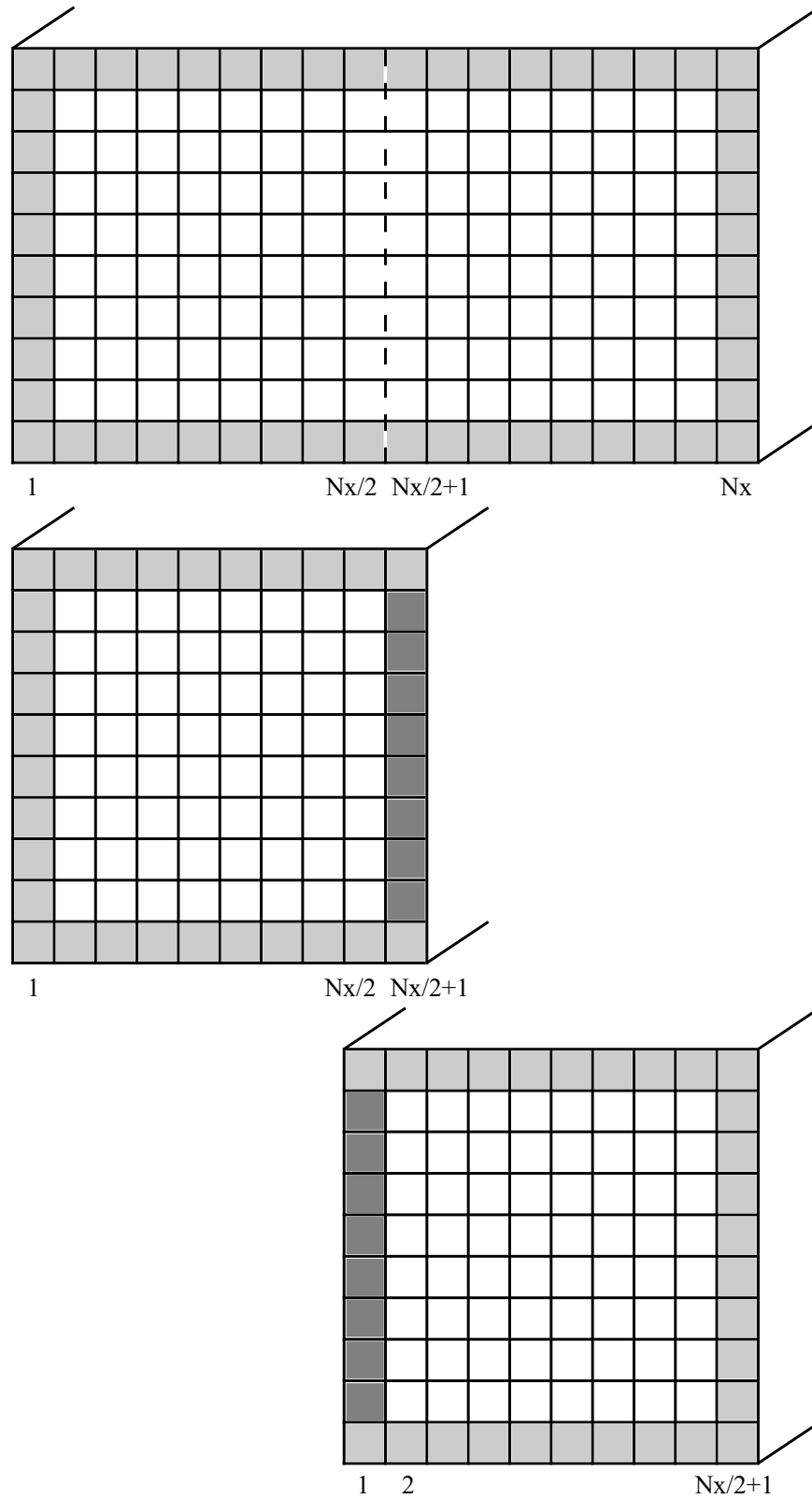


Рисунок 3.1 – Декомпозиция расчетной области на две подобласти по направлению X . Вверху — исходная область вычислений, посередине и внизу — подобласти после декомпозиции. Белые ячейки — внутренние, светло-серые — граничные, темно-серые — граничные ячейки на границе сопряжения подобластей, они пространственно совпадают с некоторыми внутренними ячейками другой подобласти.

носится в столбец 1 второй подобласти, а внутренний столбец 2 второй подобласти переносится в столбец $Nx/2 + 1$ первой подобласти.

3.1.2 Программная реализация алгоритма

При разработке алгоритма трехмерного конечно-разностного моделирования сейсмических волновых полей в анизотропной среде [Lisitsa, Vishnevskiy, 2010] (Глава 2) учитывается, на каких именно компьютерах он будет реализоваться как научно-исследовательская версия программного обеспечения. При использовании этого алгоритма для численного двумерного моделирования волновых полей вычислительная сложность практических задач относительно невелика, что позволяет использовать для вычислений любые современные персональные компьютеры, при этом не требуется распараллеливания вычислений, а выбор языка программирования и компилятора широк. Однако при использовании алгоритма для трехмерного моделирования практические задачи требуют для вычислений оперативной памяти в несколько сотен гигабайт и больше. Таким требованиям удовлетворяет ограниченное количество современных суперкомпьютеров. Уже при разработке алгоритма необходимо знать, какие программные технологии организации параллельных вычислений поддерживаются на этих суперкомпьютерах.

Программа, реализующая алгоритм, разрабатывалась для использования на компьютерах Сибирского суперкомпьютерного центра ИВМиМГ СО РАН (кластеры «НКС-30Т» и «НКС-1П») и Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ (кластеры «Ломоносов-1» и «Ломоносов-2»). Для написания программ на этих кластерах используются языки программирования C/C++ и Fortran. Для реализации алгоритма конечно-разностного трехмерного моделирования сейсмических волновых полей выбран язык программирования C++ и широко используемый на суперкомпьютерах компилятор этого языка фирмы Intel. Выбор компилятора обусловлен его широкой распространенностью в качестве программного обеспечения, применяемого на вычислительных кластерах, и предполагает лучшую переносимость разработанной программы на другое аппаратное обеспечение в случае необходимости.

Кластер представляет собой группу серверов, каждый из которых содержит 2-4 многоядерных процессора, объединенных высокоскоростными каналами связи.

При этом, с точки зрения пользователя, это единый аппаратный комплекс. Серверы кластера являются независимыми: каждый со своей собственной оперативной памятью.

Программным средством организации межсерверного взаимодействия для организации параллельных вычислений на использованных для моделирования суперкомпьютерах служит программный интерфейс MPI (Message Passing Interface — интерфейс передачи сообщений) в реализации IntelMPI для ССКЦ и OpenMPI для кластеров ЦКП МГУ. При использовании MPI выполняемая программа порождает несколько независимо выполняемых MPI-потоков. Каждый MPI-поток обладает своей независимой памятью, между MPI-потоками возможна передача информации (сообщений) и синхронизация. Используемая для распараллеливания алгоритма трехмерного моделирования волновых полей декомпозиция вычислительной области напрямую реализуется при помощи технологии MPI.

Как сказано выше, серверы кластера включают несколько многоядерных процессоров. Ядро процессора — это его часть, которая выполняет один поток программных команд. Поскольку при выполнении параллельного программного кода с MPI используется несколько независимых MPI-потоков, каждый из них выполняется своим процессорным ядром, то именно количество ядер процессора, необходимое для расчетов, является мерой вычислительных ресурсов кластера. Вычислительные ресурсы суперкомпьютера, необходимые для работы программы, определяются произведением количества задействованных процессорных ядер на время работы программы (на время вычислений), или «ядрочасами».

Для оценки качества распараллеливания произвольной программы используются критерий ускорения A_c ее параллельной работы и критерий эффективности E_f (загруженность процессоров) ее параллельной работы. Ускорение и эффективность определяются по времени, затрачиваемому компьютером на выполнение расчетов, при различном количестве используемых для расчетов процессорных ядер.

Ускорение A_c параллельных вычислений показывает, во сколько раз время расчетов t уменьшается (во сколько раз быстрее выполняются вычисления) при увеличении количества используемых процессорных ядер, и описывается отношением:

$$A_c = \frac{t_{N_0}}{t_{N_1}}, \quad (3.1)$$

где N_0 — начальное количество процессорных ядер, используемых для численного решения задачи, t_{N_0} — время вычислений при использовании N_0 процессорных ядер, N_1 ($N_1 > N_0$) — увеличенное количество вычислительных ядер для расчетов, t_{N_1} — время вычислений при использовании N_1 процессорных ядер. В идеальном случае отсутствия накладных расходов время вычислений уменьшается ровно во столько раз, во сколько увеличено число используемых для вычислений процессорных ядер. В действительности это значение оказывается меньшим за счет расходов, связанных с пересылками информации между вычислительными потоками. Объем пересылок растет с увеличением числа используемых процессорных ядер.

Эффективность работы параллельной программы показывает долю использования процессоров. Она определяется как ускорение, нормированное на отношение использованных процессорных ядер N_1 , к начальному их количеству N_0 (во столько раз увеличивается количество используемых для решения процессорных ядер), по формуле:

$$Ef = \frac{N_0}{N_1} \times \frac{t_{N_0}}{t_{N_1}} = Ac \times \frac{N_0}{N_1}. \quad (3.2)$$

В идеальном случае отсутствия накладных расходов значение эффективности составляет единицу, при реальных расчетах — несколько меньше.

Обычно величины ускорения (3.1) и эффективности (3.2) распараллеливания определяются для $N_0 = 1$, тогда эффективность показывает долю использования процессорных ядер: при выполнении программы в одном потоке на одном процессорном ядре исполнение программы не прерывается для обмена информацией с другими потоками. Но поскольку работа конечно-разностного алгоритма сейсмического моделирования в трехмерном пространстве на одном процессорном ядре невозможна, для вычисления эффективности распараллеливания используется значение $N_0 > 1$. В этом случае значение эффективности не совпадает напрямую с загруженностью процессорных ядер, но отражает относительное уменьшение их загруженности.

Для оценки ускорения и эффективности распараллеливания вычислений при помощи алгоритма конечно-разностного трехмерного моделирования волновых полей рассчитывается волновое поле для плоскопараллельной модели анизотропной среды с использованием различного количества задействованных в расчетах процессорных ядер. Минимальное использованное количество процессорных ядер —

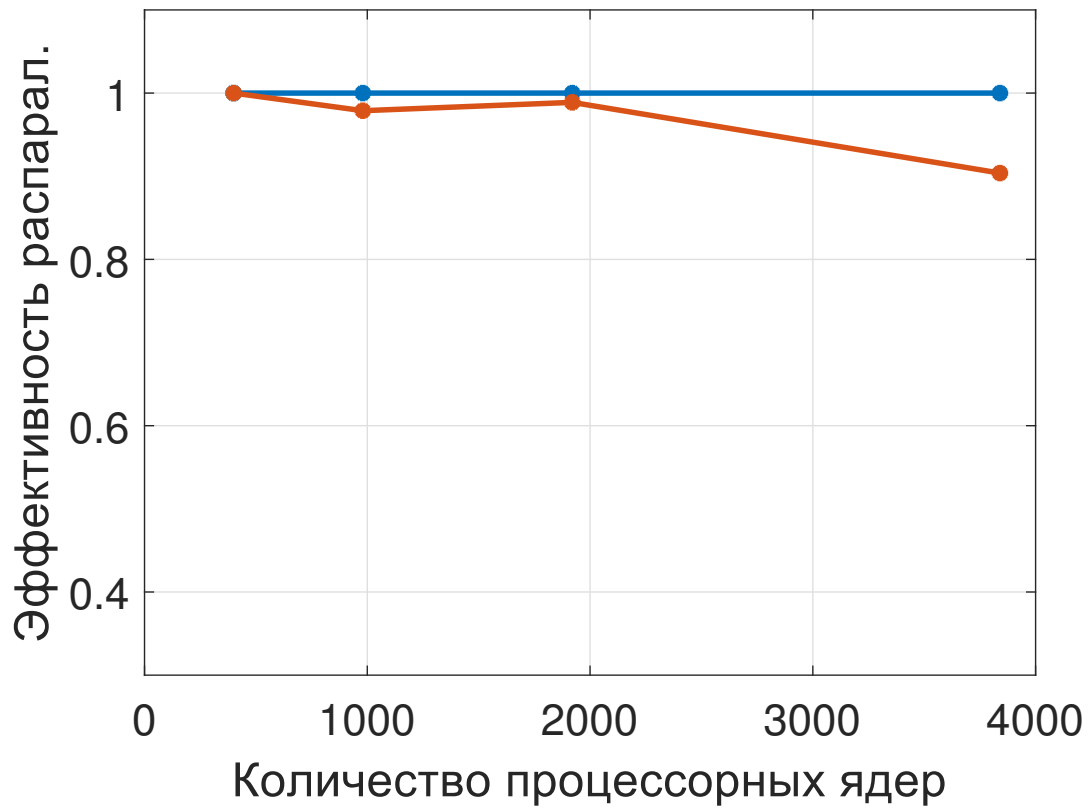


Рисунок 3.2 – Эффективность распараллеливания расчетов при трехмерном моделировании волновых полей с использованием конечно-разностной схемы Лебедева для плоскопараллельной модели среды. Красный график — фактическая эффективность реализованного алгоритма, синий график — идеальная эффективность при отсутствии накладных расходов

400, максимальное — 3840, что соответствует увеличению количества ядер в 9.6 раза. На графике зависимости эффективности распараллеливания вычислений многопроцессорной реализации алгоритма от числа используемых процессорных ядер (Рисунок 3.2) видно, что эффективность при удвоении количества используемых ядер составляет 98%, а при повышении количества используемых ядер в 9.6 раза составляет примерно 92%, т.е. ускорение расчетов составляет приблизительно 8.83 раза при идеальном ускорении в 9.6 раза. Такую эффективность распараллеливания вычислений можно считать хорошей.

3.1.3 Расчет волновых полей для однородной анизотропной среды

Для подтверждения корректности разработанного алгоритма численного трехмерного моделирования волновых полей с помощью конечно-разностной схемы Лебедева и проверки на наличие технических ошибок в программной реализации этого алгоритма выполнена серия численных экспериментов для однородной анизотропной среды. В однородной среде скорости распространения сейсмических волн в зависимости от направления находятся аналитически [Гольдин, 2008], что дает возможность построить по ним волновые фронты для точечного источника и сопоставить их с волновыми полями, найденными численно. Соответственно в численных экспериментах рассчитываются волновые поля от точечного источника в однородной анизотропной среде.

Для расчетов используются две модели однородной анизотропной упругой среды с трансверсально-изотропным типом анизотропии. Первая модель — трансверсально-изотропная среда с вертикальной осью симметрии (vertical transverse isotropy или VTI), вторая — та же среда с наклоненной на 45° в плоскости XZ осью симметрии (tilted transverse isotropy или TTI). Анизотропия такого типа свойственна, например, при осреднении тонкослоистой среды [Backus, 1962; Puzyrev et al., 1984]. В трансверсально-изотропной среде точечный источник типа центра расширения возбуждает волны трех возможных типов: квазипродольную (qP), быструю квазипоперечную (qSH) и медленную квазипоперечную (qSV) с фронтом более сложной формы.

Выбраны следующие параметры трансверсально-изотропной модели среды

(в записи через параметры Томсена [Thomsen, 1986]):

$$\rho = 2500 \text{ кг/м}^3, V_p = 4000 \text{ м/с}, V_s = 2055 \text{ м/с}, \epsilon = 0.334, \gamma = 0.575, \delta^* = 0.93,$$

где V_p и V_s — скорости квазипродольной и двух квазипоперечных волн вдоль оси симметрии анизотропии, ρ — плотность, а ϵ , γ и δ^* — параметры Томсена. На индикатрисах групповых скоростей для VTI модели (Рисункок 3.3, вверху), для TTI модели (Рисункок 3.4, вверху слева) видно, что индикатрисы для модели с наклоненной осью симметрии совпадают с индикатрисами для модели с вертикальной осью симметрии, повернутыми на 45° , фронт медленной квазипоперечной волны достаточно сложен и содержит каустики (параллельные и перпендикулярные оси симметрии модели), а также существенно различаются скорости медленной и быстрой поперечных волн, при численном моделировании должно наблюдаться их четкое разделение.

Вычислительная область — куб со стороной 2.5 км, шаг дискретизации области по пространству $h = 2.5$ м, соответственно конечно-разностная сетка содержит 1000 ячеек по каждому из трех направлений. Точечный источник возбуждения сейсмических волн расположен в точке с координатами $x = 750$ м, $y = 750$ м, $z = 750$ м. Используются источники двух типов: центр расширения (правая часть не равна нулю в уравнениях на σ_{xx} , σ_{yy} и σ_{zz}) и диполь с моментом (правая часть не равна нулю в уравнении на σ_{xz}). Форма импульса — функция Риккера с доминирующей частотой $\nu_0 = 30$ Гц. На выходе сохраняются мгновенные снимки волновых полей (компоненты u_x , u_y , u_z) в плоскостях, параллельных координатным плоскостям XY, XZ и YZ, проходящим через источник сейсмических волн.

На мгновенных снимках компоненты волнового поля u_x для VTI и TTI моделей (Рисунки 3.3 – 3.5) видно хорошее совпадение волновых фронтов и индикатрис групповых скоростей соответствующих волн. На изображениях мгновенные снимки волнового поля в сечениях по плоскостям XY, XZ и YZ, проходящим через начало координат, собраны в соответствующие грани кубов в изометрической проекции.

Также по мгновенным снимкам волнового поля для VTI модели (Рисункок 3.3) видно, что рассчитанное для источника типа центра расширения волновое поле не содержит быстрой поперечной волны, а для источника в виде диполя с

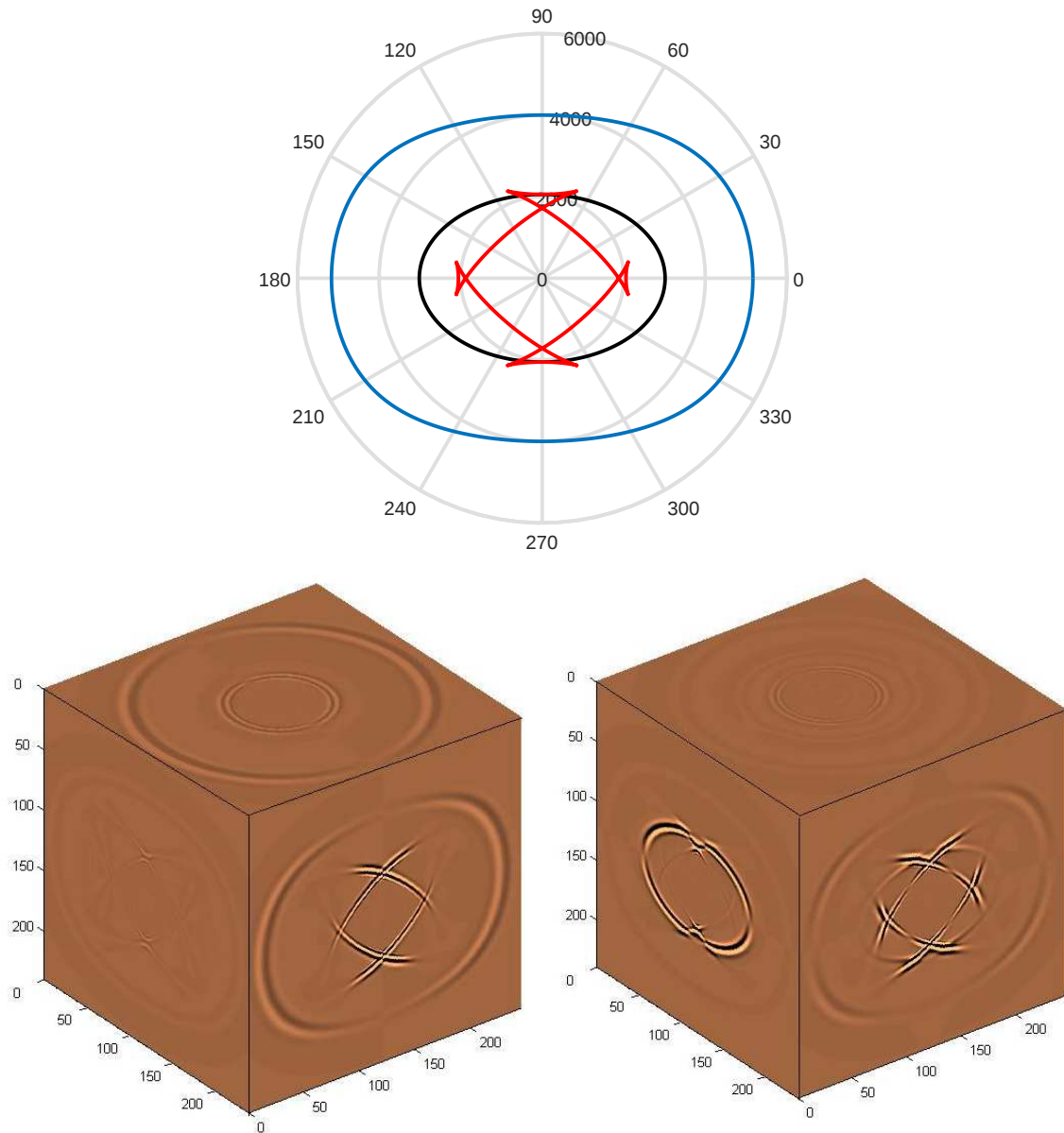


Рисунок 3.3 – Индикатрисы групповых скоростей для модели VTI среды в плоскости XZ (вверху); мгновенные снимки u_x компоненты вектора скорости смещения для модели VTI среды с источником типа центра расширения (внизу слева) и диполя с моментом (внизу справа)

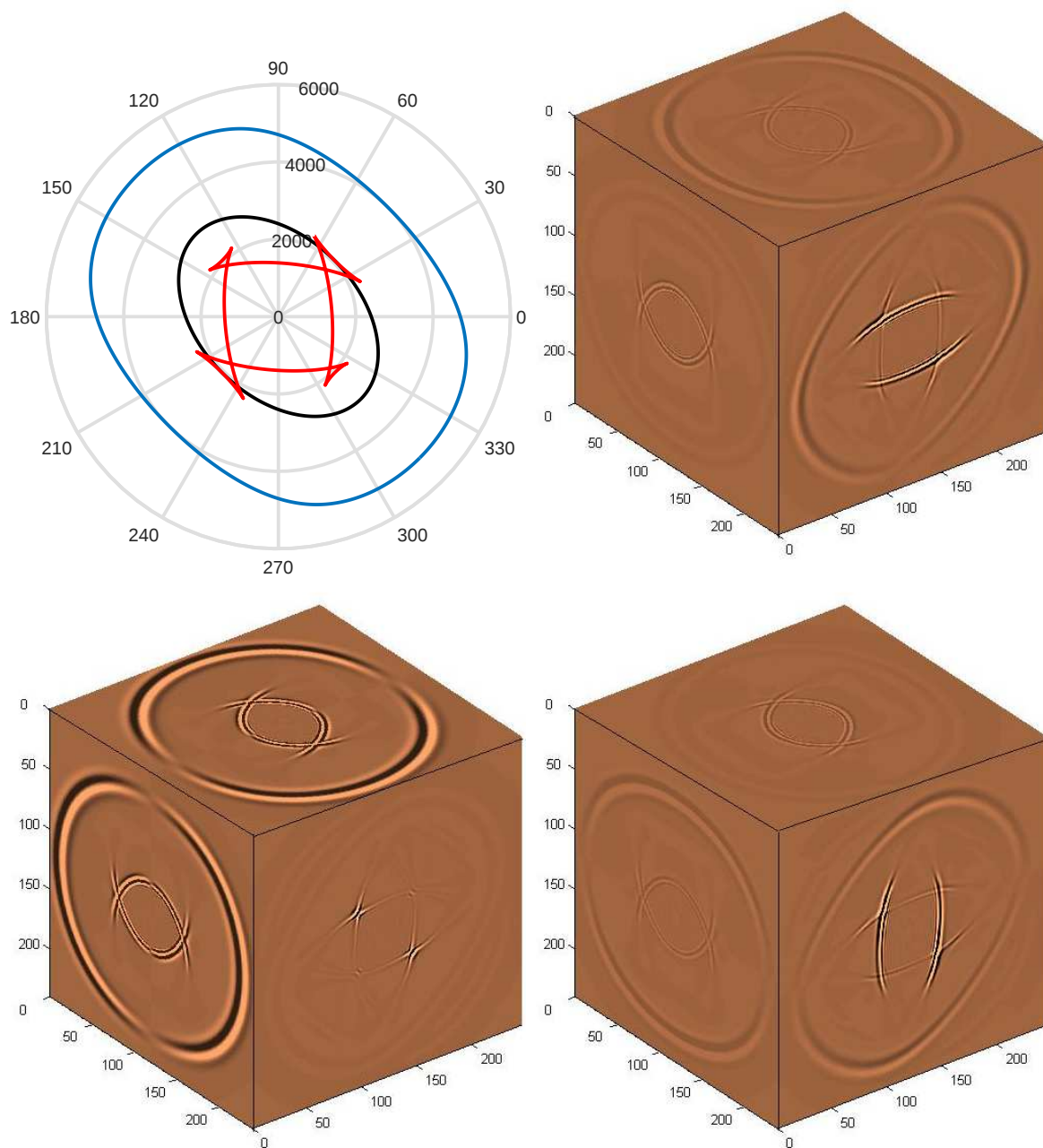


Рисунок 3.4 – Индикатрисы групповых скоростей для модели ТТІ среды в плоскости XZ (вверху слева); мгновенные снимки u_x компоненты (вверху справа), u_y компоненты (внизу слева), u_z компоненты (внизу справа) вектора скорости смещения для модели ТТІ среды с источником типа центра расширения

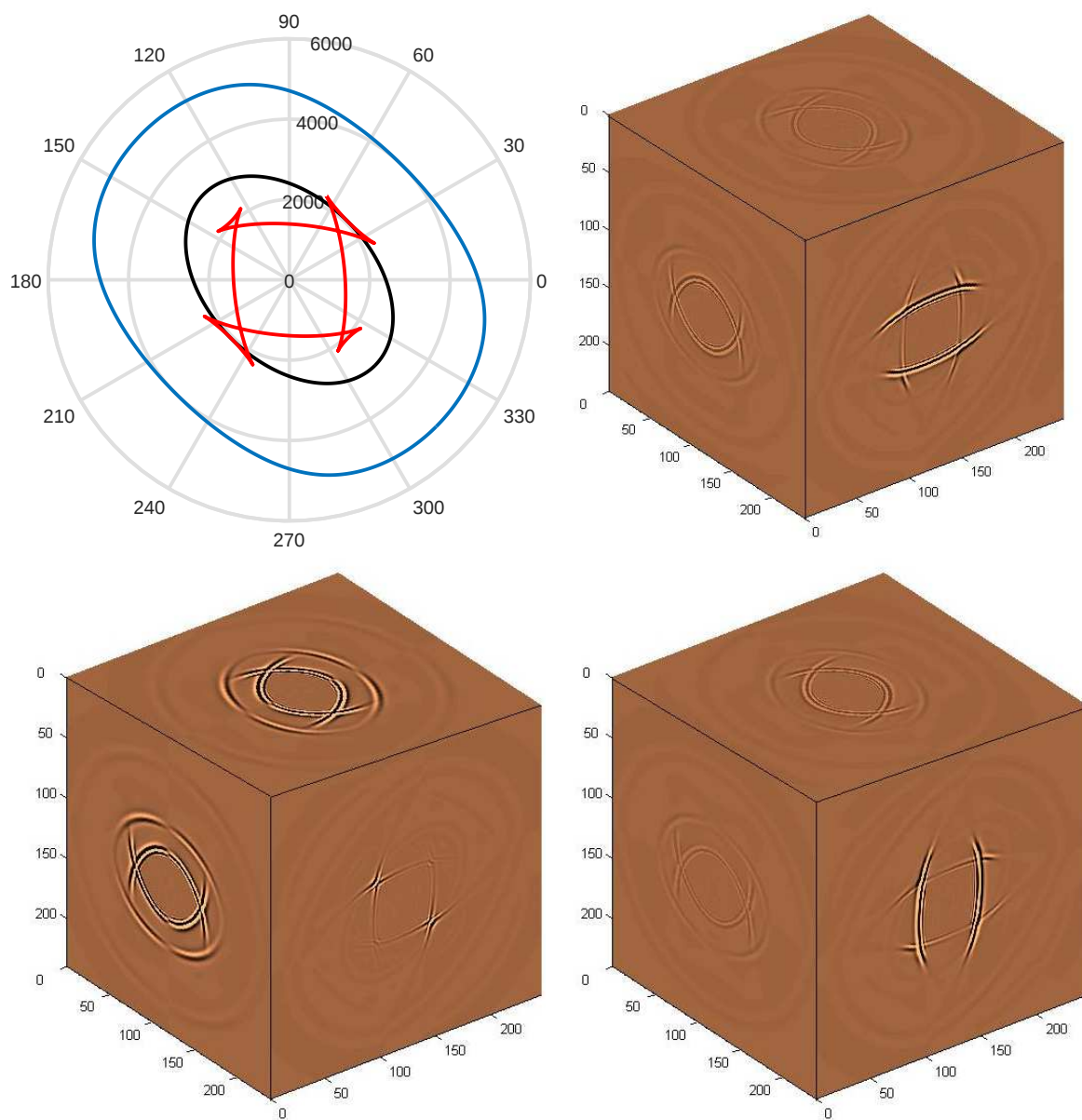


Рисунок 3.5 – Индикатрисы групповых скоростей для модели ТТІ среды в плоскости XZ (вверху слева); мгновенные снимки u_x компоненты (вверху справа), u_y компоненты (внизу слева), u_z компоненты (внизу справа) вектора скорости смещения для модели ТТІ среды с источником типа диполя с моментом

моментом данная волна появляется, что согласуется с теорией [Гольдин, 2008].

3.2 Численное исследование сходимости конечно-разностных схем на сдвинутых сетках в средах с контрастными границами

Формулы для определения значений коэффициентов ρ_{IJK} (2.11), μ_{IJK} (2.12), λ_{IJK} и $(\lambda + 2\mu)_{IJK}$ конечно-разностной схемы на сдвинутых сетках (2.8), значений коэффициентов ρ_{IJK} (2.15), μ_{IJK} , λ_{IJK} и $(\lambda + 2\mu)_{IJK}$ конечно-разностной схемы на повернутых сетках (2.14), значений коэффициента ρ_{IJK} и матричного коэффициента C_{IJK} (2.19) конечно-разностной схемы Лебедева (2.17) выводятся в предположении, что границы разрыва коэффициентов среды дифференциальной задачи для системы уравнений упругости (2.1) проходят по линиям (в двумерном случае) или плоскостям (в трехмерном случае) сетки [Virieux, 1986; Saenger et al., 2000; Lisitsa, Vishnevskiy, 2010].

Однако в упругой модели реальной среды границы разрыва коэффициентов могут быть наклонными, криволинейными, с выклиниванием и т.д. и не совпадать с линиями или плоскостями используемой конечно-разностной сетки. Один из способов построения сеточной модели среды по ее упругой модели — это приближение границы разрыва коэффициентов ступенчатой границей, проходящей по линиям или плоскостям сетки. Оценок порядка сходимости конечно-разностных уравнений с такой сеточной моделью среды в публикациях не найдено.

Как известно, разностная схема сходится, если:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v_h - P_h v\|_h = 0, \quad (3.3)$$

где v — решение дифференциальной задачи, $P_h v$ — проекция решения дифференциальной задачи на сетку с шагом h , v_h — решение конечно-разностной задачи на сетке с шагом h , $\|\cdot\|_h$ — норма в пространстве сеточных функций на сетке с шагом h . Поскольку аналитического доказательства сходимости конечно-разностных схем на частично разнесенных сетках для произвольной упругой среды из литературы неизвестно, их сходимость исследуется непосредственной проверкой равенства нулю предела (3.3) путем численного решения для конкретной упругой среды серии конечно-разностных уравнений на вложенных сетках с уменьшающимся шагом

[Vishnevsky et al., 2014]. Для нескольких моделей двумерной упругой среды строятся сеточные модели с уменьшающимися шагами, находятся решения конечно-разностных уравнений схемы на сдвинутых сетках, схемы на повернутых сетках и схемы Лебедева, полученные решения анализируются на сходимость соответственно пределу (3.3). Хотя сходимость решения конечно-разностной схемы к решению дифференциальной задачи только на некотором конечном наборе моделей упругой среды не доказывает сходимости конечно-разностной схемы, но если этот конечный набор моделей упругой среды достаточно репрезентативен, то сходимость на конечном частном наборе упругих сред является значимым аргументом в пользу сходимости схемы.

В качестве репрезентативного набора моделей упругих сред рассматриваются модели с границами разрыва коэффициентов уравнений четырех типов. Первый тип моделей — однородная среда без границ разрыва коэффициентов (изотропная или анизотропная). Из теории известно, что для моделей таких сред все три конечно-разностных схемы дают второй порядок численной сходимости [Самарский, 1983; Virieux, 1986; Saenger et al., 2000; Lisitsa, Vishnevskiy, 2010]. Численные эксперименты также показывают второй порядок сходимости для всех трех конечно-разностных схем, что соответствует теории и подтверждает корректность работы программы.

Второй тип моделей — среда с прямолинейной горизонтальной границей, проходящей по линиям сетки. Для моделей упругих сред с такой границей исследование показывает зависимость порядка сходимости от типа среды: изотропной, анизотропной, а также с контактом упругое тело-жидкость. Для упругой среды с горизонтальной границей все три схемы обладают вторым порядком сходимости и в изотропном, и в анизотропном случае. Для моделей среды с границей упругое тело-жидкость второй порядок сходимости дает только схема на сдвинутых сетках, схема на повернутых сетках и схема Лебедева — первый. Эти численные эксперименты показывают, что для границ разрыва коэффициентов среды, проходящих по линиям сетки, конечно-разностное моделирование дает более точный результат, чем для границ произвольного вида.

Границы в геофизических моделях упругой среды обычно кусочно-гладкие, в двумерном случае состоящие из кусков гладких линий, соединяющихся под уг-

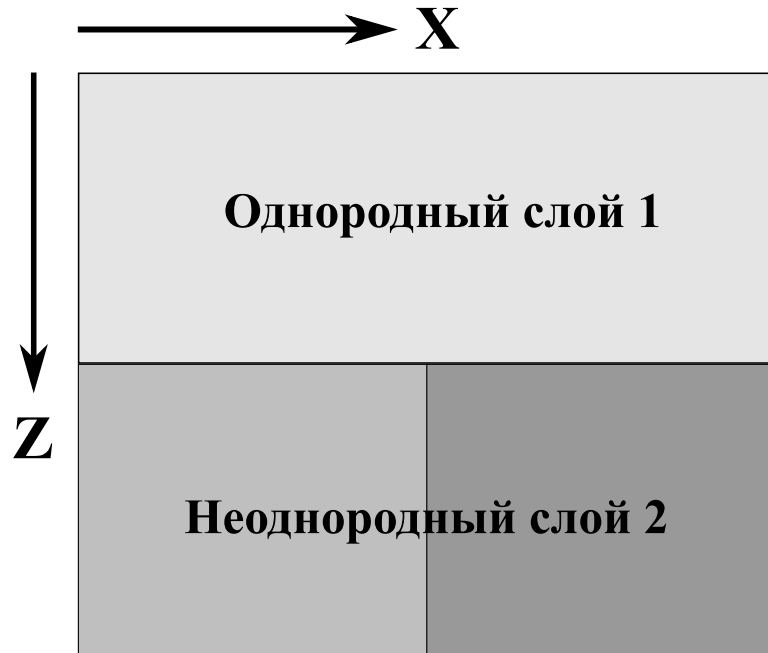


Рисунок 3.6 – Схематичное изображение слоистой модели упругой среды, состоящей из однородного и неоднородного слоев.

лами. В численных экспериментах их представляют модели третьего и четвертого типов. Третий тип моделей — среда с наклонной границей, которая аппроксимируется проходящей по линиям сетки ступенчатой границей. Модель с прямолинейной наклонной границей представляет при исследовании численной сходимости модели с гладкими границами. В этом случае порядок сходимости оказывается первым для всех трех схем.

Наконец, четвертый тип моделей — среда более сложного строения. Среда состоит из двух слоев: однородный слой сверху и слой внизу, разделенный вертикальной границей, справа и слева от которой упругие параметры среды различаются. Схематичное изображение таких моделей приводится на рисунке (Рисунок 3.6). Границы разрыва коэффициентов этой модели состоят из двух гладких частей, соединенных под прямым углом, тем самым их гладкость нарушается (в одной точке). Топологически границы разрыва коэффициентов этой модели соответствуют выклиниванию в геофизической модели реальной среды. Для среды такого типа результаты численных экспериментов снова показывают первый порядок сходимости для схемы на повернутых сетках и схемы Лебедева, а для схемы на сдвинутых сетках — второй порядок сходимости.

Причем доступные вычислительные ресурсы не позволяют проводить по-

добные численные эксперименты с уменьшением шага дискретизации в моделях трехмерной упругой среды. Поэтому численное исследование сходимости конечно-разностных схем выполняется для двумерной среды. И даже в двумерном случае для проведения вычислений требуется многопроцессорный суперкомпьютер.

Разработанные для численного исследования сходимости конечно-разностной схемы на повернутых сетках и схемы Лебедева программы получили государственную регистрацию программ для ЭВМ [Вишневский, Лисица, 2021a; Вишневский, Лисица, 2021b].

3.2.1 Вложенные сетки и описание численного эксперимента

Для численного исследования сходимости решения конечно-разностной схемы для некоторой модели упругой среды строится серия вложенных конечно-разностных сеток с уменьшающимися шагами [Vishnevsky et al., 2014]. Для каждой сетки строится сеточная упругая модель среды и решается конечно-разностная задача, т.е. численно находится волновое поле, после чего полученный ряд численных решений исследуется на сходимость.

Во всех численных экспериментах упругая среда представляет собой прямоугольную область фиксированного размера 200×220 м. В этой области для системы уравнений упругости ставится задача Коши со следующими начальными данными:

$$\begin{aligned} u_x &= 0; \\ u_z &= 0; \\ \sigma_{xz} &= 0; \\ \sigma_{xx} &= \exp \left\{ -0.1 \left((x - x_s)^2 + (z - z_s)^2 \right) \right\}; \\ \sigma_{zz} &= \exp \left\{ -0.1 \left((x - x_s)^2 + (z - z_s)^2 \right) \right\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Таковыми начальными данными описывается возбуждение сейсмической волны от источника типа центр расширения, расположенного в точке с координатами $x_s = 100$ м, $z_s = 100$ м, приблизительно в центре области.

Для численного решения поставленной дифференциальной задачи используется серия из восьми вложенных сеток с уменьшающимися шагами (с номерами от 0 до 7) для каждой из трех схем. Пространственные шаги этих сеток для схемы на

повернутых сетках $h_0 = 1$ м, $h_1 = h_0/2 = 0.5$ м, $h_k = h_0/2^k$ м вплоть до $h_7 = h_0/2^7 \approx 8$ мм. Пространственные шаги для схем на сдвинутых сетках и Лебедева в $\sqrt{2}$ раз больше, а количество ячеек сетки вдоль каждого пространственного направления в $\sqrt{2}$ меньше, что обеспечивает одинаковый уровень численной дисперсии для всех решений на сетках с одинаковым номером. Для каждой сетки значения сеточных упругих параметров в ячейке сетки берутся переносом упругих параметров среды, соответствующих центру ячейки. После чего решается конечно-разностная задача. Если исходная упругая среда изотропная, находятся конечно-разностные решения для схемы на сдвинутых сетках, для схемы на повернутых сетках и для схемы Лебедева. Таким образом для упругой модели изотропной среды решается 24 конечно-разностных задачи (три схемы по восемь сеток для каждой). Для анизотропной упругой среды находятся конечно-разностные решения для схемы на повернутых сетках и для схемы Лебедева. Т.е. решается 16 конечно-разностных задач (две схемы по восемь сеток для каждой). Результатом для каждой конечно-разностной схемы является ряд из восьми численных решений, полученных для уменьшающихся пространственных шагов h_k и приближающихся к решению дифференциальной задачи с уменьшением шага, т.е. с увеличением номера решения в ряду.

Поскольку для рассматриваемых выше упругих моделей аналитическое решение дифференциальной задачи известно из литературы только для однородной среды, равенство нулю предела (3.3)) и порядок сходимости исследуются по относительной ошибке соседних численных решений в ряду. По рассчитанным волновым полям вычисляется относительная ошибка ϵ_k в норме L_2 решения v_k на сетке с номером k и решения v_{k+1} на сетке с номером $k+1$, спроецированного на сетку с номером k :

$$\epsilon_k = \|v_k - v_{k+1}\| / \|v_k\|.$$

Для определения порядка сходимости по относительной ошибке ϵ_k определяется «индикатор сходимости» δ_k :

$$\delta_k = \epsilon_{k+1} / \epsilon_k.$$

Индикатор сходимости δ_k находится по трем последовательным решениям конечно-разностной задачи v_k , v_{k+1} , v_{k+2} . Для линейных конечно-разностных схем, к кото-

рым относятся схемы на частично разнесенных сетках, для индикатора сходимости установлена асимптотическая связь с порядком сходимости конечно-разностной схемы [Vishnevsky et al., 2014]:

$$\delta_k \approx \left(\frac{h_k}{h_{k+1}} \right)^\gamma,$$

где γ — это порядок сходимости численного решения конечно-разностной задачи к решению дифференциальной задачи, h_k — шаг сетки с номером k . Тем самым определение порядка зависимости ошибки численного решения от шага сетки сводится к определению зависимости индикатора сходимости от номера конечно-разностной сетки в серии путем построения графика этой зависимости.

В выполненных численных экспериментах отношение последовательных шагов вложенных сеток всегда равняется двум: $h_k/h_{k+1} = 2$. Т.е. если индикатор сходимости $\delta_k \approx 4$, то решение сходится со вторым порядком, а при $\delta_k \approx 2$ — решение сходится с первым порядком.

3.2.2 Сходимость конечно-разностных решений для однородной среды

Для двух моделей однородной среды выполняются численные эксперименты на сетках с измельчающимися шагами. Первая модель — однородная изотропная среда с параметрами $\rho = 1800 \text{ кг/м}^3$, $v_p = 1900 \text{ м/с}$, $v_s = 1200 \text{ м/с}$. Значения индикатора сходимости δ_k , вычисленные по ряду решений конечно-разностных задач для всех трех схем значения, близки к 4 (Рисунок 3.7), что показывает второй порядок сходимости численного решения для всех трех конечно-разностных схем.

Вторая модель — однородная анизотропная среда с параметрами $\rho = 1800 \text{ кг/м}^3$,

$$C = \begin{pmatrix} 3.6 & 1.8 & -0.9 \\ 1.8 & 3.24 & 0 \\ -0.9 & 0 & 2.7 \end{pmatrix} \times 10^9, \frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{м}^3}.$$

Аналогично изотропному случаю значения индикатора сходимости δ_k , вычисленные по ряду решений конечно-разностных задач для схемы Лебедева и схемы на повернутых сетках, близки к 4 (Рисунок 3.8), что показывает второй порядок сходимости численного решения для этих схем.

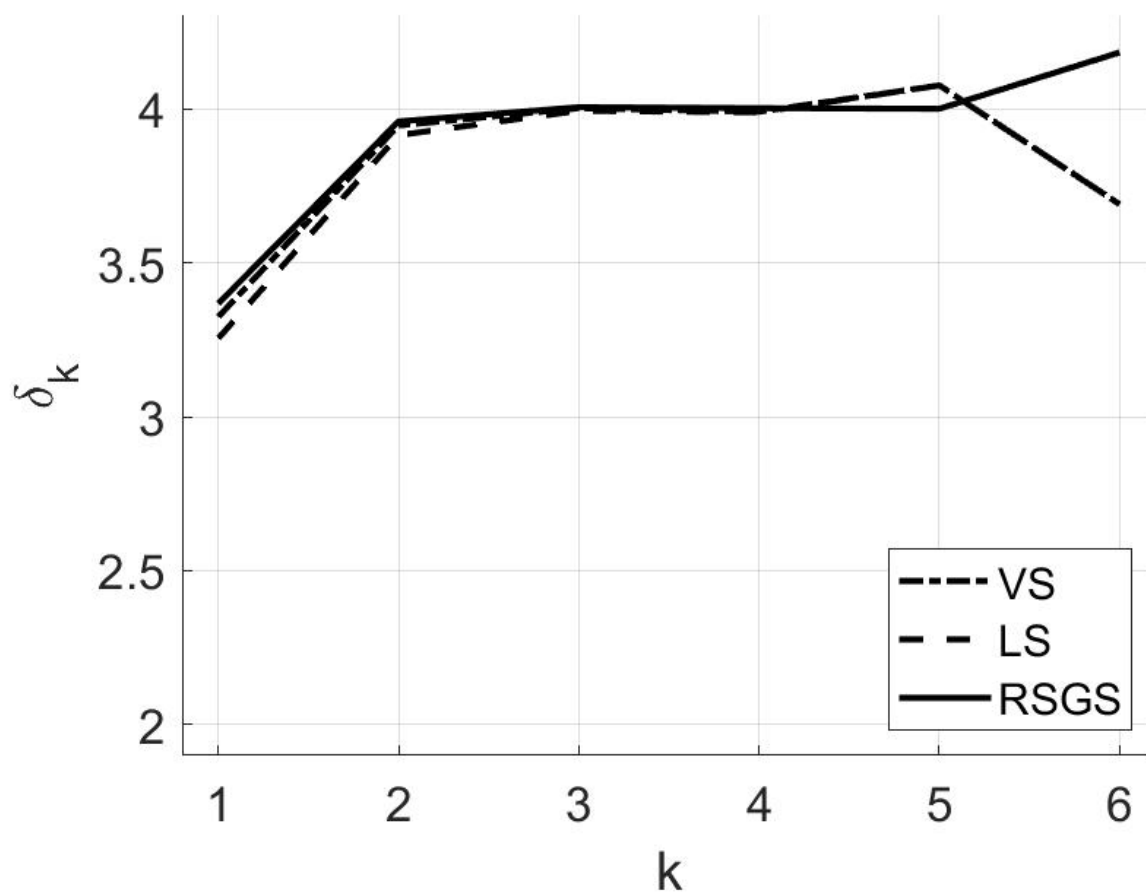


Рисунок 3.7 – Индикатор сходимости δ_k по результатам вычислений с использованием схемы на сдвинутых сетках (VS), схемы на повернутых сетках (RSGS) и схемы Лебедева (LS) для модели однородной изотропной среды.

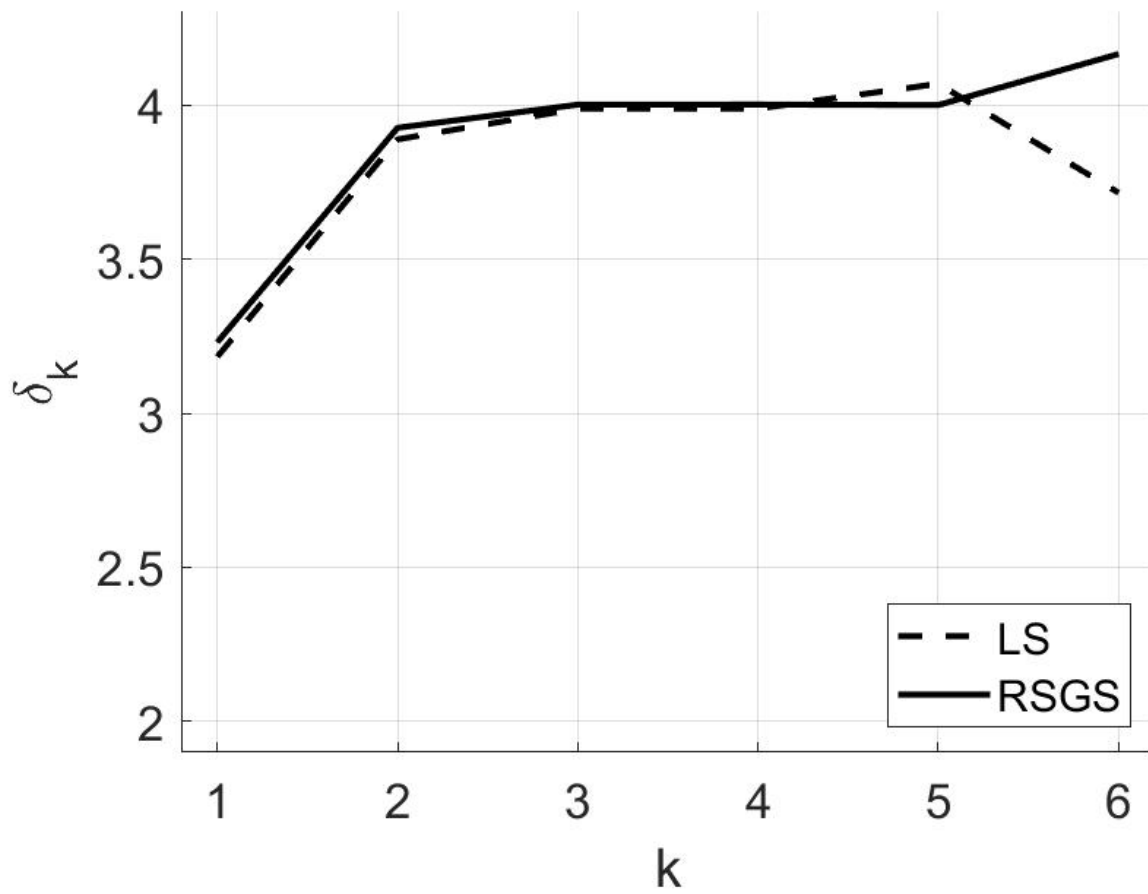


Рисунок 3.8 – Индикатор сходимости δ_k по результатам вычислений с использованием схемы на повернутых сетках (RSGS) и схемы Лебедева (LS) для модели однородной анизотропной среды.

Надо отметить, что для моделей однородной среды второй порядок сходимости получен теоретически [Virieux, 1986; Saenger et al., 2000; Lisitsa, Vishnevskiy, 2010], и результаты численных экспериментов убедительно это подтверждают.

3.2.3 Сходимость конечно-разностных решений для среды с горизонтальной границей

Для четырех моделей среды с горизонтальной границей, проходящей на глубине $z = 120$ м, выполняются численные эксперименты по исследованию численной сходимости на сетках с измельчающимися шагами.

Первая модель — упругая среда состоящая из двух изотропных слоев с горизонтальной границей между ними: сверху слой с упругими параметрами $\rho = 1800$ кг/м³, $v_p = 1900$ м/с, $v_s = 1200$ м/с, внизу слой с упругими параметрами $\rho = 2200$ кг/м³, $v_p = 2400$ м/с, $v_s = 1400$ м/с. По значениям индикатора сходимости δ_k (Рисунок 3.9), вычисленным по ряду решений конечно-разностных задач, видно, что решение сходится со вторым порядком для всех трех конечно-разностных схем.

Вторая модель — среда с горизонтальным контактом слоя идеальной жидкости и изотропного упругого слоя: сверху слой идеальной жидкости с параметрами $\rho = 1000$ кг/м³, $c = 1500$ м/с, внизу изотропный слой с упругими параметрами $\rho = 1800$ кг/м³, $v_p = 1900$ м/с, $v_s = 1200$ м/с. Значения индикатора сходимости δ_k , вычисленные по ряду решений конечно-разностных задач для схемы на сдвинутых сетках, близки к 4 (Рисунок 3.10), что показывает второй порядок сходимости численного решения. Для схемы Лебедева и схемы на повернутых сетках значения индикатора сходимости δ_k с увеличением значения k приближаются к 2, что показывает первый порядок для этих схем.

Третья модель — упругая среда состоящая из двух анизотропных слоев с горизонтальным контактом между ними: сверху анизотропный упругий слой с параметрами $\rho = 1800$ кг/м³,

$$C = \begin{pmatrix} 3.6 & 1.8 & -0.9 \\ 1.8 & 3.24 & 0 \\ -0.9 & 0 & 2.7 \end{pmatrix} \times 10^9, \frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{м}^3};$$

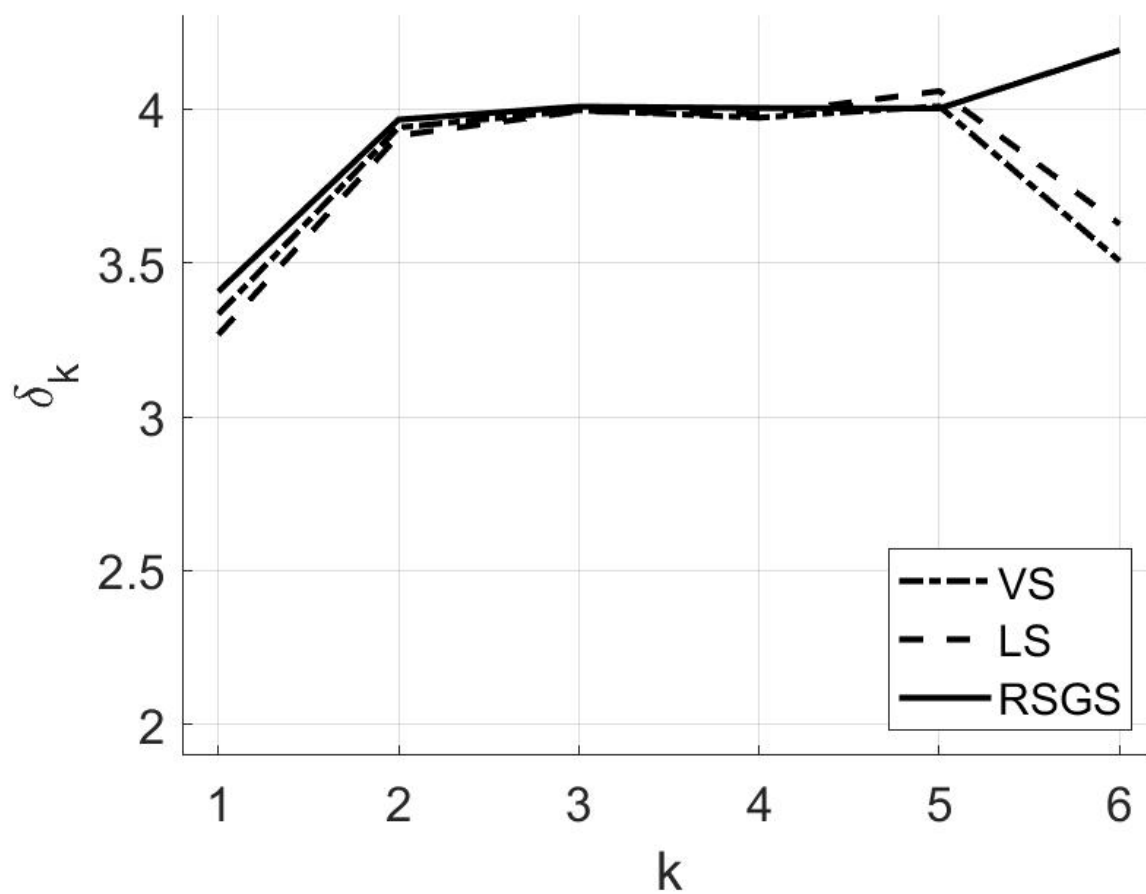


Рисунок 3.9 – Индикатор сходимости δ_k по результатам вычислений с использованием схемы на сдвинутых сетках (VS), схемы на повернутых сетках (RSGS) и схемы Лебедева (LS) для модели среды с горизонтальным контактом двух изотропных слоев.

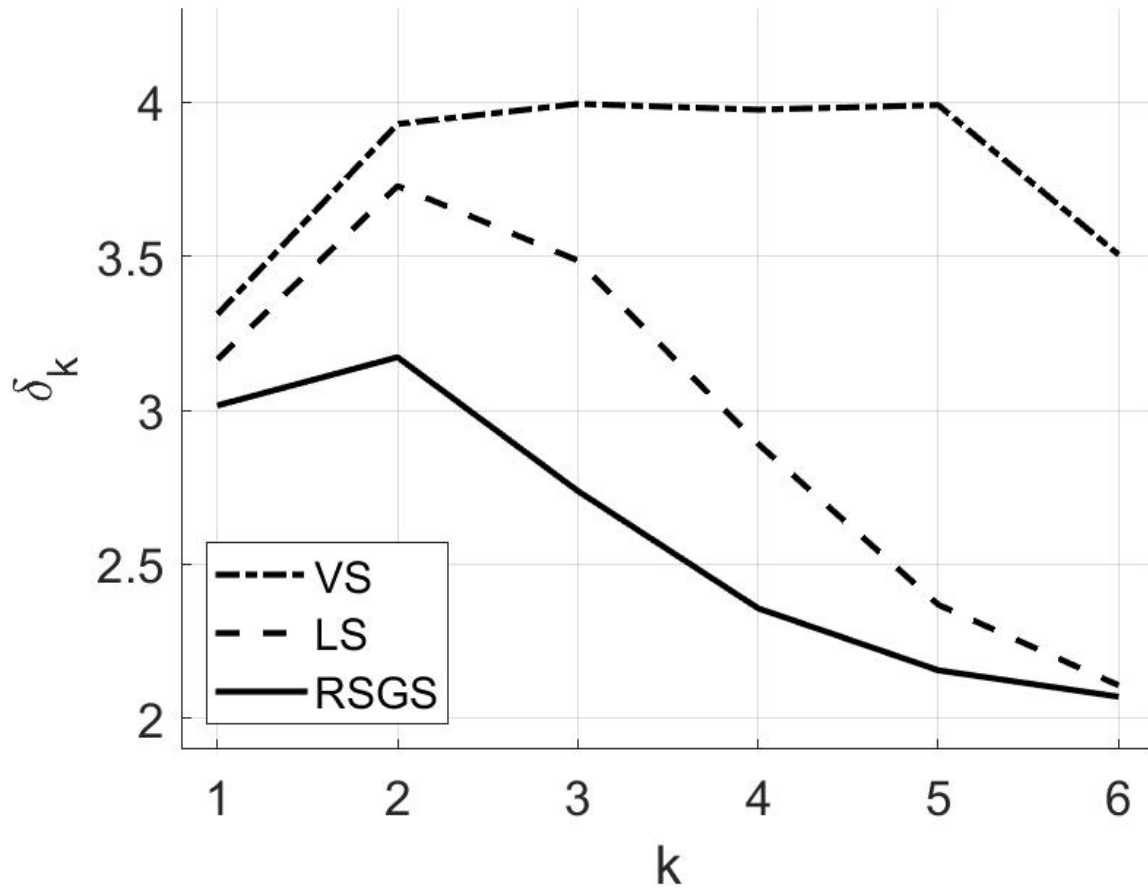


Рисунок 3.10 – Индикатор сходимости δ_k по результатам вычислений с использованием схемы на сдвинутых сетках (VS), схемы на повернутых сетках (RSGS) и схемы Лебедева (LS) для модели среды с горизонтальным контактом слоя идеальной жидкости и изотропного упругого слоя.

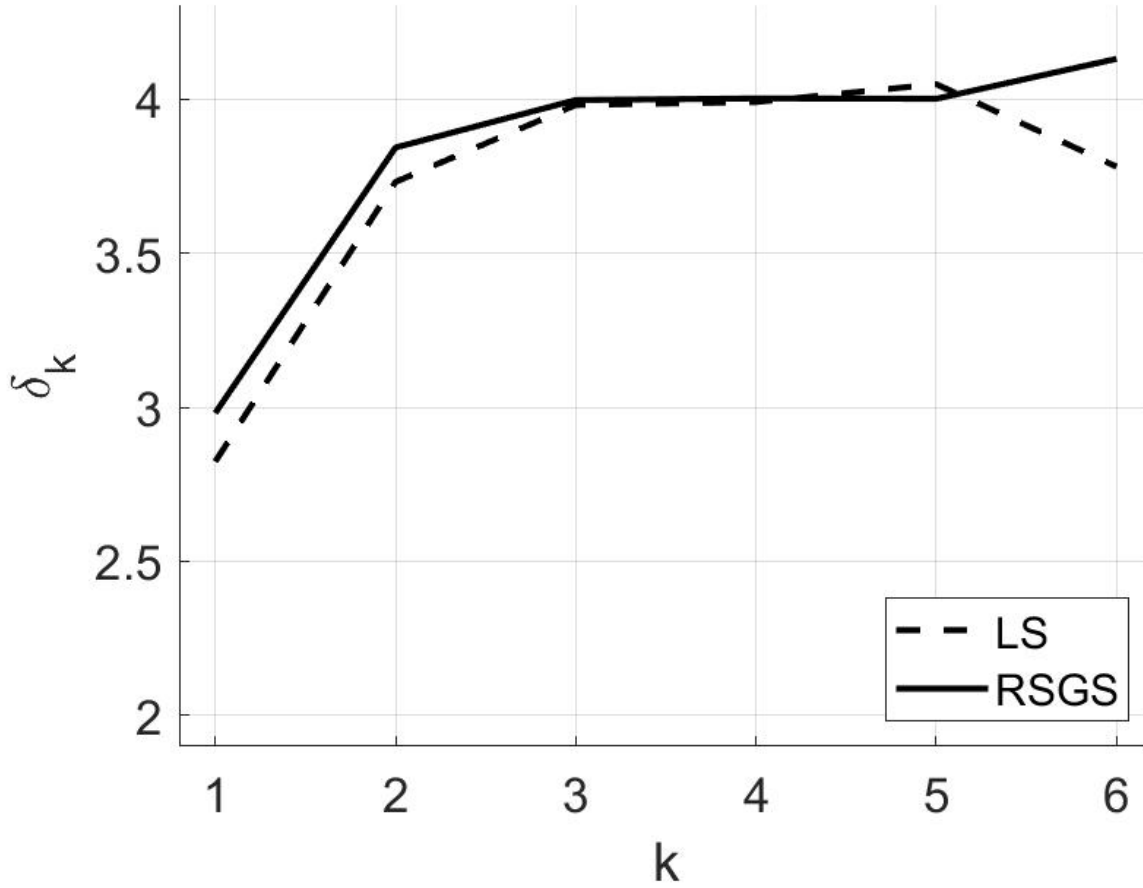


Рисунок 3.11 – Индикатор сходимости δ_k по результатам вычислений с использованием схемы на повернутых сетках (RSGS) и схемы Лебедева (LS) для модели упругой среды с горизонтальным контактом двух анизотропных слоев.

внизу — с параметрами $\rho = 2200 \text{ кг/м}^3$,

$$C = \begin{pmatrix} 4.4 & 2.2 & 2.2 \\ 2.2 & 6.6 & 2.2 \\ 2.2 & 2.2 & 4.4 \end{pmatrix} \times 10^9, \frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{м}^3}.$$

Значения индикатора сходимости δ_k , вычисленные по ряду решений конечно-разностных задач для схемы Лебедева и схемы на повернутых сетках, приближаются к 4 с увеличением k (Рисунок 3.11), что показывает второй порядок сходимости для обеих использованных схем.

Четвертая модель — среда с горизонтальным контактом слоя идеальной

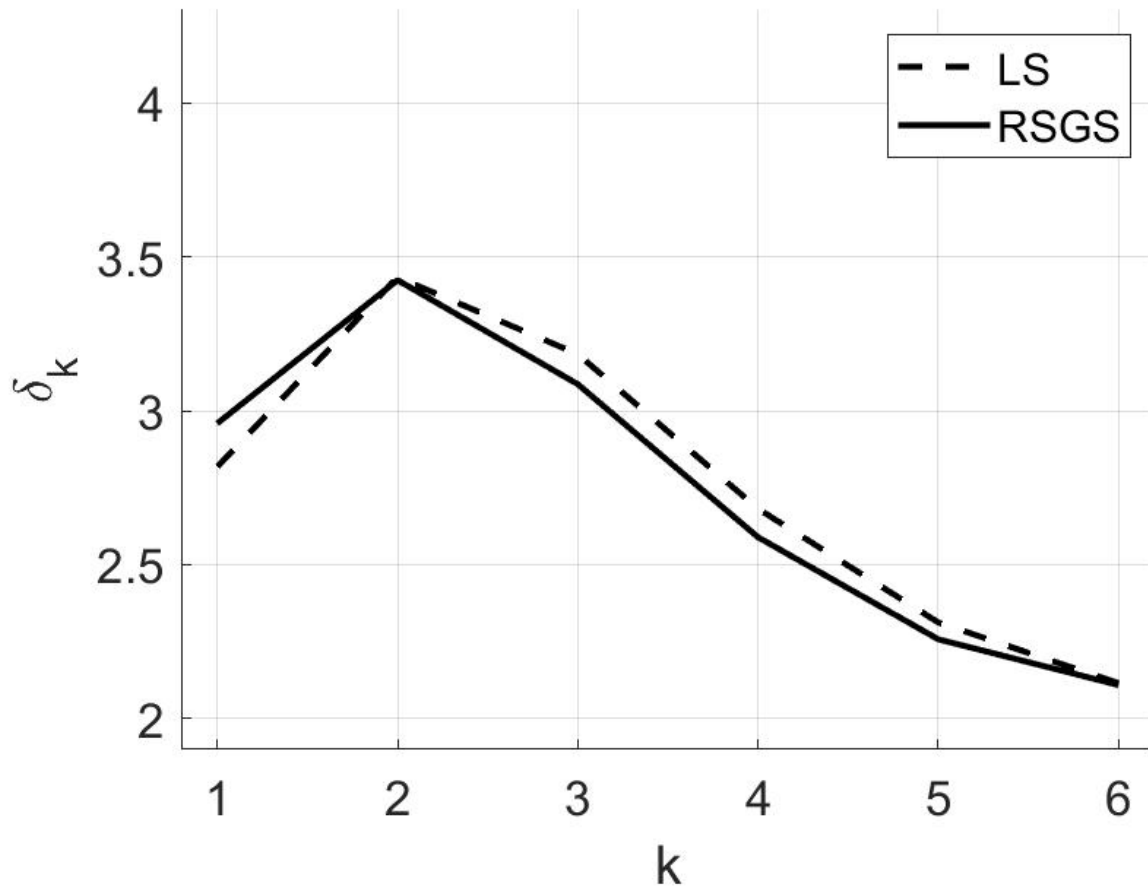


Рисунок 3.12 – Индикатор сходимости δ_k по результатам вычислений с использованием схемы на повернутых сетках (RSGS) и схемы Лебедева (LS) для модели среды с горизонтальным контактом слоя идеальной жидкости и анизотропного упругого слоя.

жидкости и анизотропного упругого слоя. Вверху слой идеальной жидкости с параметрами $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $c = 1500 \text{ м/с}$, внизу анизотропный упругий слой с параметрами $\rho = 2200 \text{ кг/м}^3$,

$$C = \begin{pmatrix} 4.4 & 2.2 & 2.2 \\ 2.2 & 6.6 & 2.2 \\ 2.2 & 2.2 & 4.4 \end{pmatrix} \times 10^9, \frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{м}^3}.$$

Значения индикатора сходимости δ_k , вычисленные по ряду решений конечно-разностных задач для схемы Лебедева и схемы на повернутых сетках, приближаются к 2 с увеличением k (Рисунок 3.12), что показывает первый порядок сходимости решения для обеих схем.

Из научных публикаций известно, что анализ коэффициентов отражения и преломления плоских волн на горизонтальной границе в схемах на частично разнесенных сетках показывает сходимость этих коэффициентов к точным со вторым порядком [Lisitsa et al., 2010; Podgornova et al., 2010], что согласуется с приведенными результатами численных экспериментов.

3.2.4 Сходимость конечно-разностных решений для среды с наклонной прямолинейной границей

Для четырех моделей среды с прямолинейной наклонной границей выполняются численные эксперименты по исследованию численной сходимости на сетках с измельчающимися шагами. Угол наклона границы к горизонтали составляет 30° . На сетке граница аппроксимируется ступенчатой границей, значения упругих параметров в каждой ячейке сетки берутся равными значениям упругих параметров модели упругой среды в середине этой ячейки.

Первая модель — упругая среда, состоящая из двух изотропных слоев с наклонной прямолинейной границей между ними: вверху слой с упругими параметрами $\rho = 1800 \text{ кг/м}^3$, $v_p = 1900 \text{ м/с}$, $v_s = 1200 \text{ м/с}$, внизу слой с упругими параметрами $\rho = 2200 \text{ кг/м}^3$, $v_p = 2400 \text{ м/с}$, $v_s = 1400 \text{ м/с}$. Значения индикатора сходимости δ_k , вычисленные по ряду решений конечно-разностных задач, приближаются к 2 с увеличением k (Рисунок 3.13), что показывает первый порядок сходимости решения

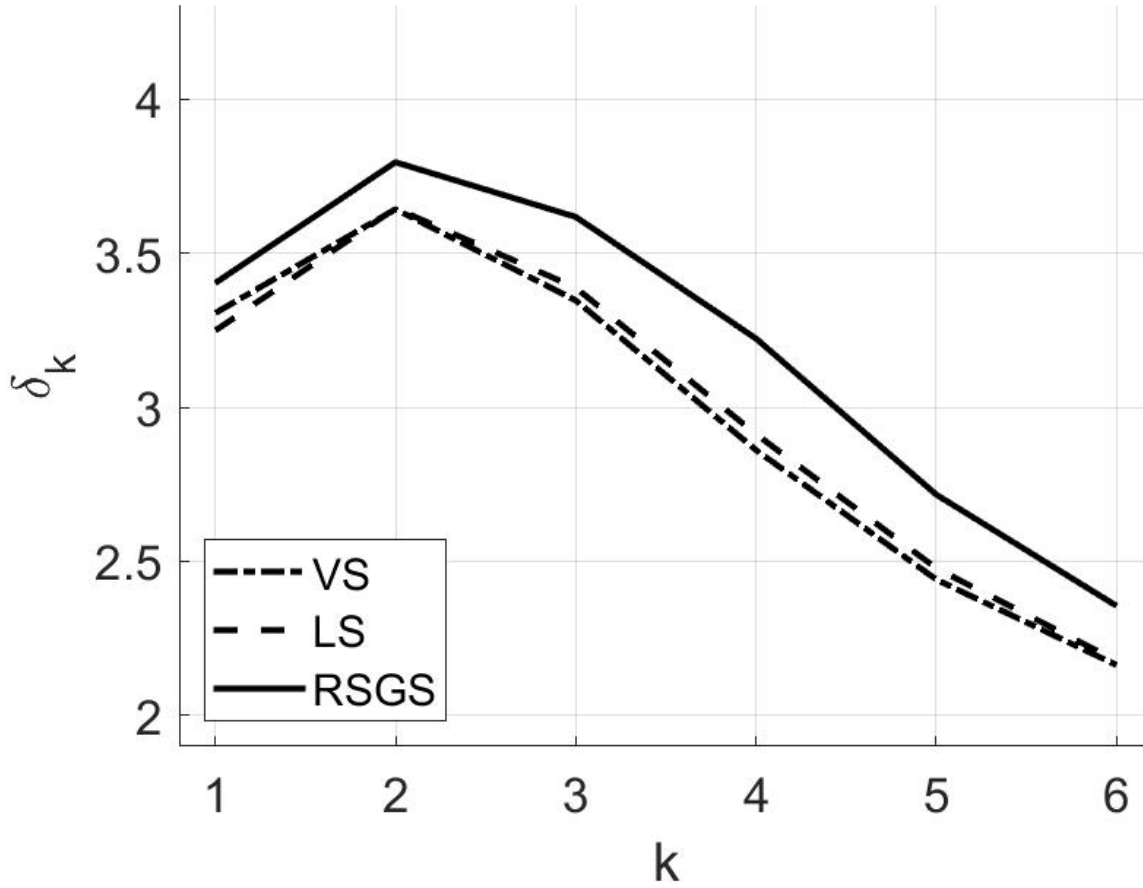


Рисунок 3.13 – Индикатор сходимости δ_k по результатам вычислений с использованием схемы на сдвинутых сетках (VS), схемы на повернутых сетках (RSGS) и схемы Лебедева (LS) для модели среды с наклонным прямолинейным контактом двух изотропных слоев.

для всех трех схем.

Вторая модель — среда с наклонным прямолинейным контактом слоя идеальной жидкости и изотропного упругого слоя: сверху слой идеальной жидкости с параметрами $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $c = 1500 \text{ м/с}$, внизу изотропный слой с упругими параметрами $\rho = 1800 \text{ кг/м}^3$, $v_p = 1900 \text{ м/с}$, $v_s = 1200 \text{ м/с}$. Индикатор сходимости δ_k , вычисленный по ряду решений конечно-разностных задач для схемы на повернутых сетках, с увеличением k принимает значения около 2 (Рисунок 3.14), что показывает первый порядок сходимости решения для этой схемы. Для схемы Лебедева и схемы на сдвинутых сетках значение индикатора сходимости для $k = 5$ и $k = 6$ становится приблизительно равными 1.5, из чего следует, что порядок сходимости не выше первого.

Третья модель — упругая среда состоящая, из двух анизотропных слоев с

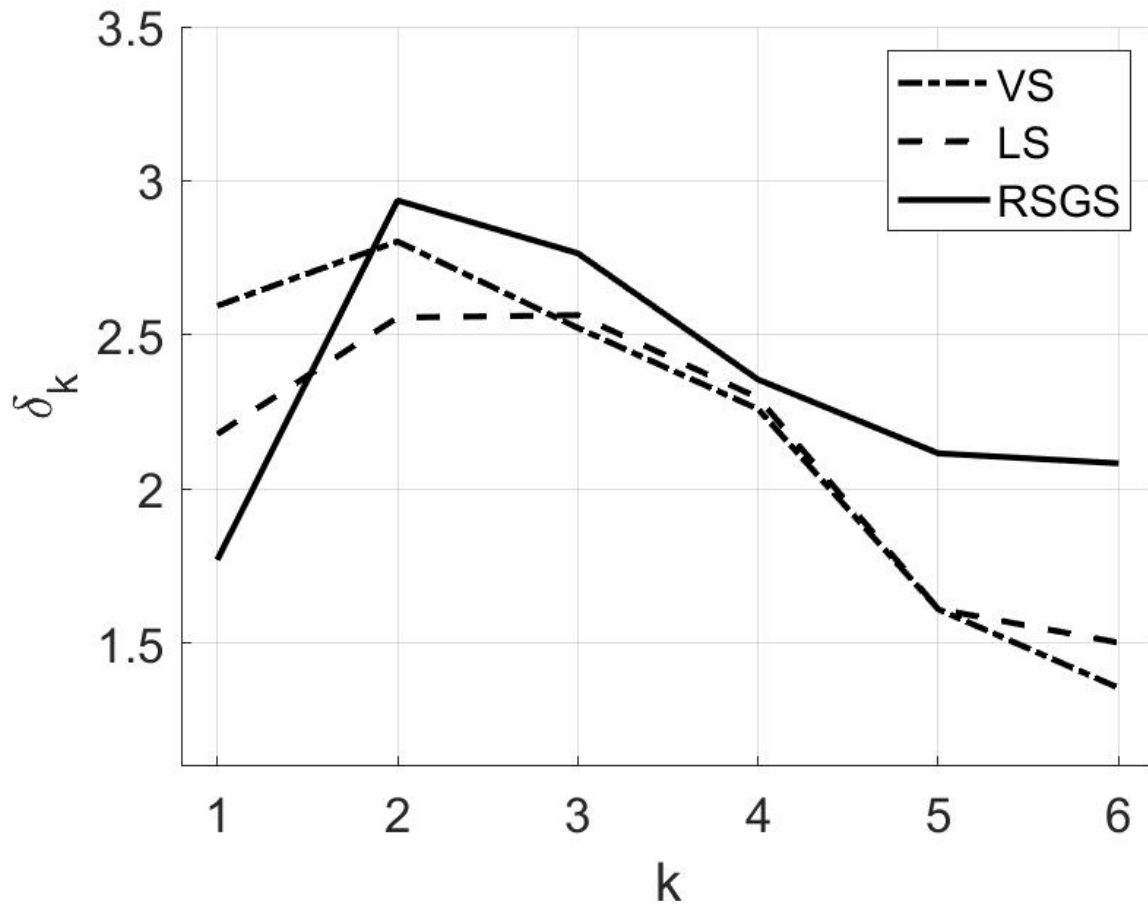


Рисунок 3.14 – Индикатор сходимости δ_k по результатам вычислений с использованием схемы на сдвинутых сетках (VS), схемы на повернутых сетках (RSGS) и схемы Лебедева (LS) для модели среды с наклонным прямолинейным контактом слоя идеальной жидкости и изотропного упругого слоя.

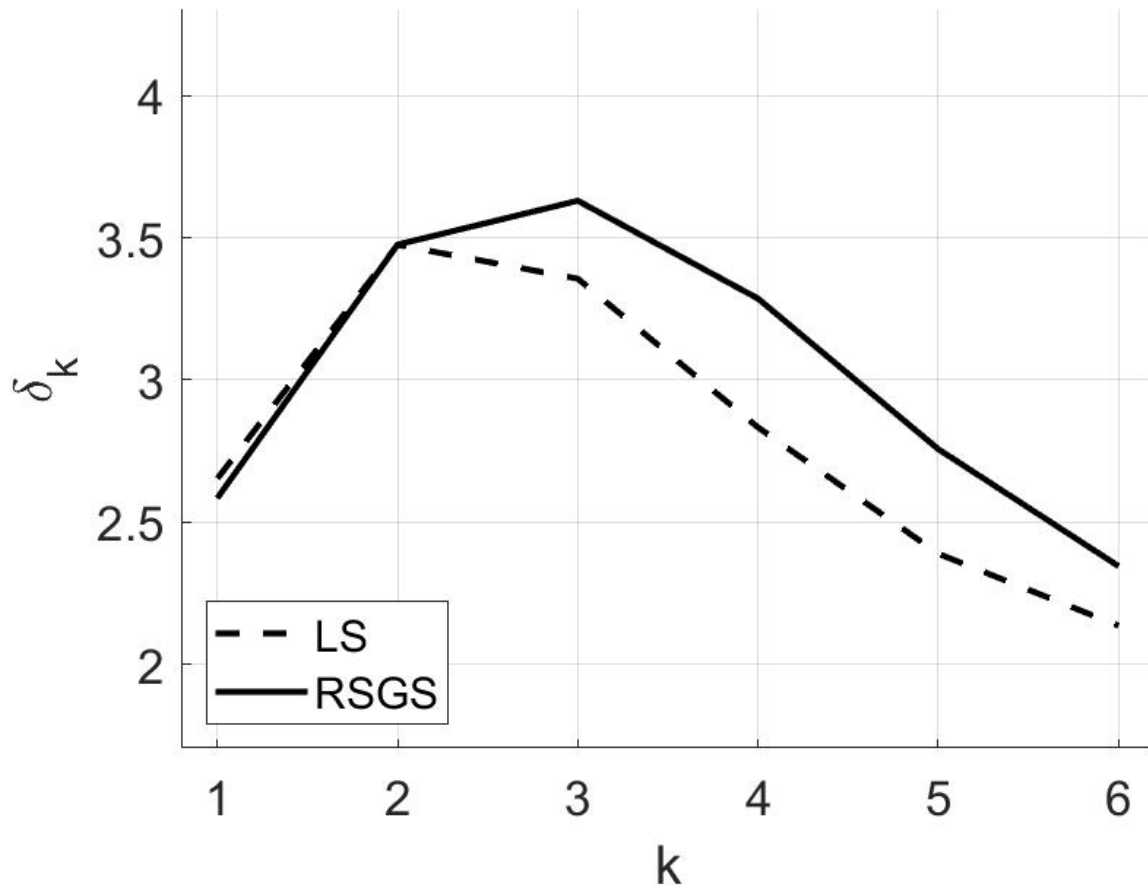


Рисунок 3.15 – Индикатор сходимости δ_k по результатам вычислений с использованием схемы на повернутых сетках (RSGS) и схемы Лебедева (LS) для модели среды с наклонным прямолинейным контактом двух анизотропных слоев.

наклонной прямолинейной границей между ними: сверху анизотропный упругий слой с параметрами $\rho = 1800 \text{ кг/м}^3$,

$$C = \begin{pmatrix} 3.6 & 1.8 & -0.9 \\ 1.8 & 3.24 & 0 \\ -0.9 & 0 & 2.7 \end{pmatrix} \times 10^9, \frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{м}^3};$$

внизу — с параметрами $\rho = 2200 \text{ кг/м}^3$,

$$C = \begin{pmatrix} 4.4 & 2.2 & 2.2 \\ 2.2 & 6.6 & 2.2 \\ 2.2 & 2.2 & 4.4 \end{pmatrix} \times 10^9, \frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{м}^3}.$$

Значения индикатора сходимости δ_k , вычисленные по ряду решений конечно-разностных задач для схемы Лебедева и схемы на повернутых сетках, приближаются к 2 с увеличением k (Рисунок 3.15), что показывает первый порядок сходимости решения для обеих использованных схем.

Четвертая модель — среда с наклонным прямолинейным контактом слоя идеальной жидкости и анизотропного упругого слоя: сверху слой идеальной жидкости с параметрами $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $c = 1500 \text{ м/с}$, внизу анизотропный упругий слой с параметрами $\rho = 2200 \text{ кг/м}^3$,

$$C = \begin{pmatrix} 4.4 & 2.2 & 2.2 \\ 2.2 & 6.6 & 2.2 \\ 2.2 & 2.2 & 4.4 \end{pmatrix} \times 10^9, \frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{м}^3}.$$

Значения индикатора сходимости δ_k , вычисленные по ряду решений конечно-разностных задач для схемы Лебедева и схемы на повернутых сетках, около 2 (Рисунок 3.16), что показывает первый порядок сходимости решения для этих схем.

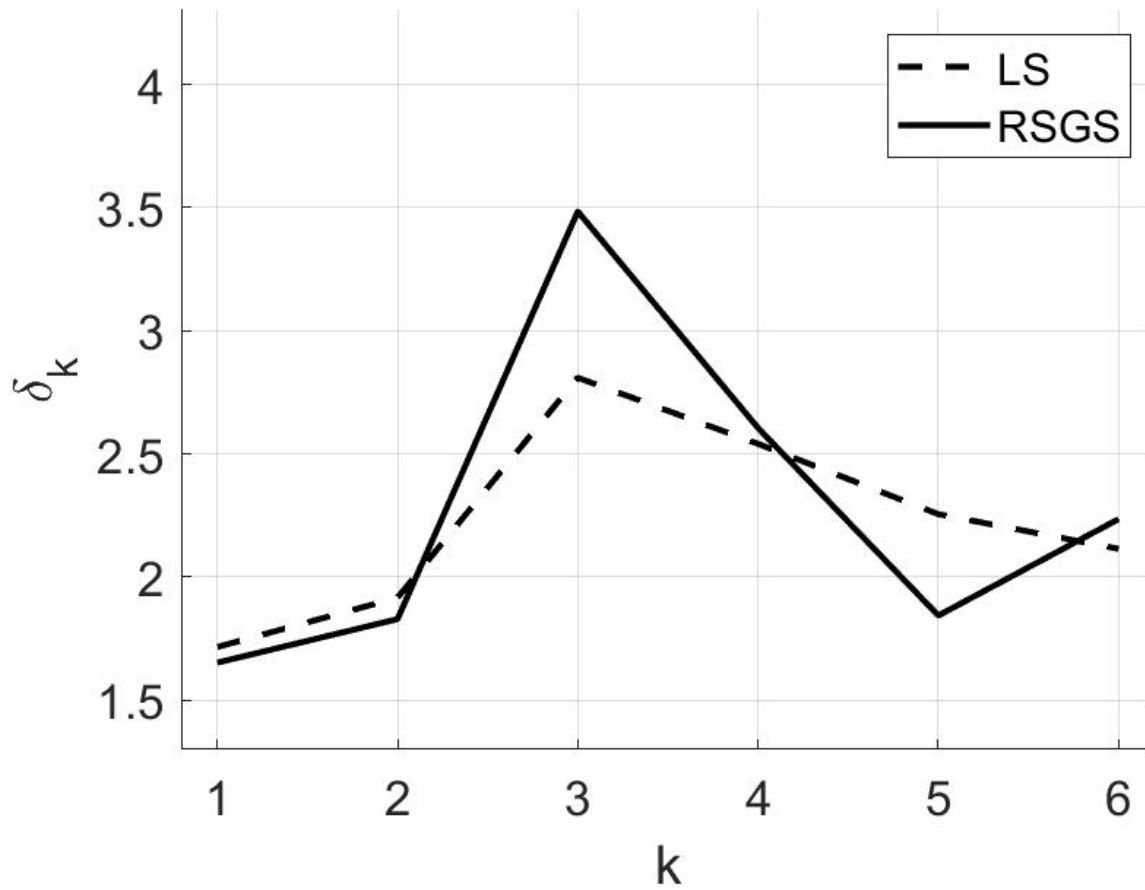


Рисунок 3.16 – Индикатор сходимости δ_k по результатам вычислений с использованием схемы на повернутых сетках (RSGS) и схемы Лебедева (LS) для модели среды с наклонным прямолинейным контактом слоя идеальной жидкости и анизотропного упругого слоя.

3.2.5 Сходимость конечно-разностных решений в среде сложного строения с негладкими границами разрыва коэффициентов уравнений

Рассматриваются четыре модели упругой среды, состоящей из двух слоев, один из которых неоднородный, вследствие чего нарушается гладкость границ разрыва коэффициентов уравнений (Рисунок 3.6). Геометрия границ слоев не меняется, меняются только упругие параметры среды для ее слоев и их частей. Среда состоит из двух слоев (однородного и неоднородного), отделенных горизонтальной границей $x = 100$ м. Вверху — однородный слой $0 < z < 120$ м, внизу — неоднородный слой $120 < z < 220$ м, разделенный вертикальной границей $x = 100$ м на две однородные части с разными упругими параметрами, тем самым гладкость границ разрыва коэффициентов уравнений нарушается в одной точке. Для этих моделей выполняются численные эксперименты по исследованию численной сходимости на сетках с измельчающимися шагами.

Слои первой упругой модели изотропные: вверху однородный слой с параметрами $\rho = 1800$ кг/м³, $V_p = 1900$ м/с, $V_s = 1200$ м/с, часть неоднородного слоя внизу слева с параметрами $\rho = 2200$ кг/м³, $V_p = 2400$ м/с, $V_s = 1400$ м/с, часть слоя внизу справа с параметрами $\rho = 1600$ кг/м³, $V_p = 1600$ м/с, $V_s = 900$ м/с. Значения индикатора сходимости δ_k (Рисунок 3.17), вычисленные по ряду решений конечно-разностных задач для схемы на сдвинутых сетках и схемы Лебедева, близки к 4, что соответствует второму порядку сходимости. Для схемы на повернутых сетках значения индикатора сходимости с ростом k приближаются к 3 — порядок сходимости первый или второй.

Во второй модели упругой среды — вверху слой идеальной жидкости с параметрами $\rho = 1000$ кг/м³, $c = 1500$ м/с, внизу неоднородный изотропный упругий слой: часть слоя внизу слева с параметрами $\rho = 2200$ кг/м³, $v_p = 2400$ м/с, $v_s = 1400$ м/с, часть слоя внизу справа с параметрами $\rho = 1600$ кг/м³, $v_p = 1600$ м/с, $v_s = 900$ м/с. Значения индикатора сходимости δ_k (Рисунок 3.18), вычисленные по ряду решений конечно-разностных задач для схемы Лебедева и схемы на повернутых сетках, близки к 2, что показывает первый порядок сходимости. Для схемы на сдвинутых сетках значения индикатора сходимости с ростом k приближаются к 3 — порядок сходимости первый или второй.

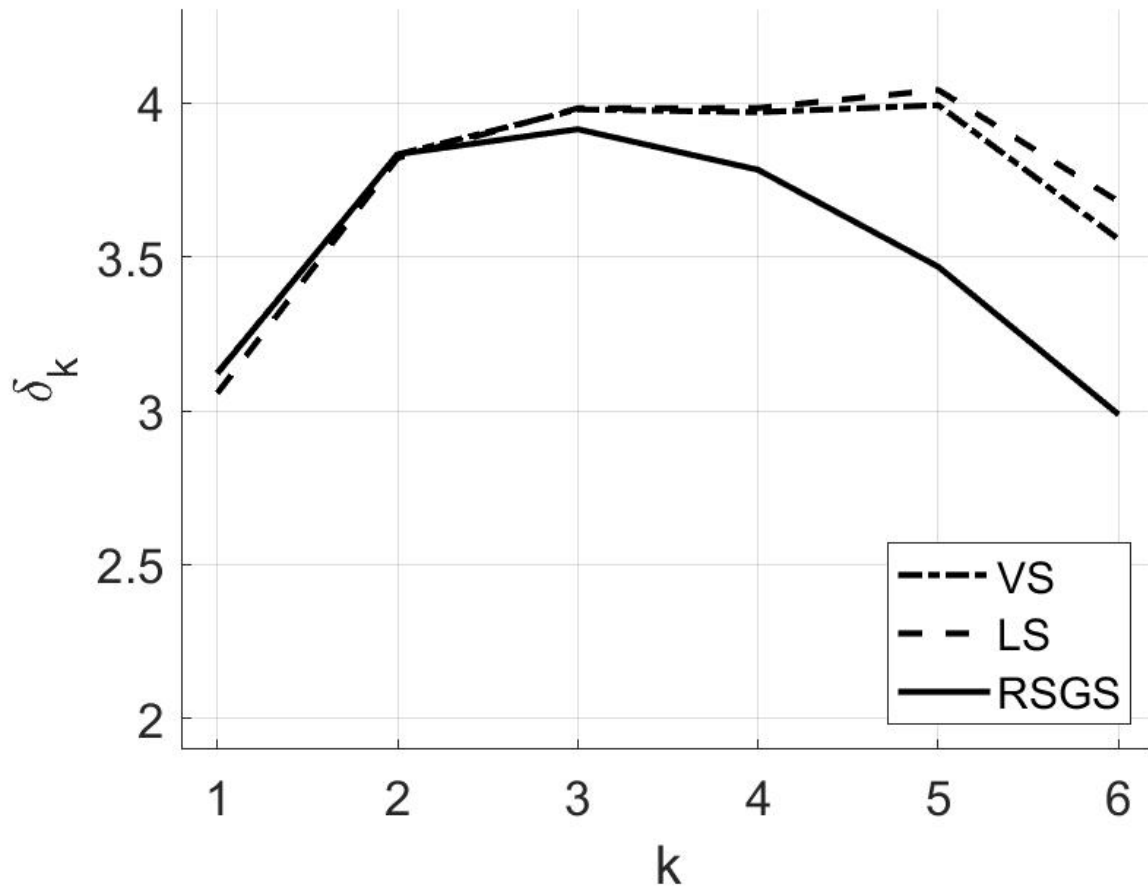


Рисунок 3.17 – Индикатор сходимости δ_k для модели изотропной упругой среды из однородного и неоднородного слоев по результатам вычислений с использованием схемы на сдвинутых сетках (VS), схемы на повернутых сетках (RSGS) и схемы Лебедева (LS).

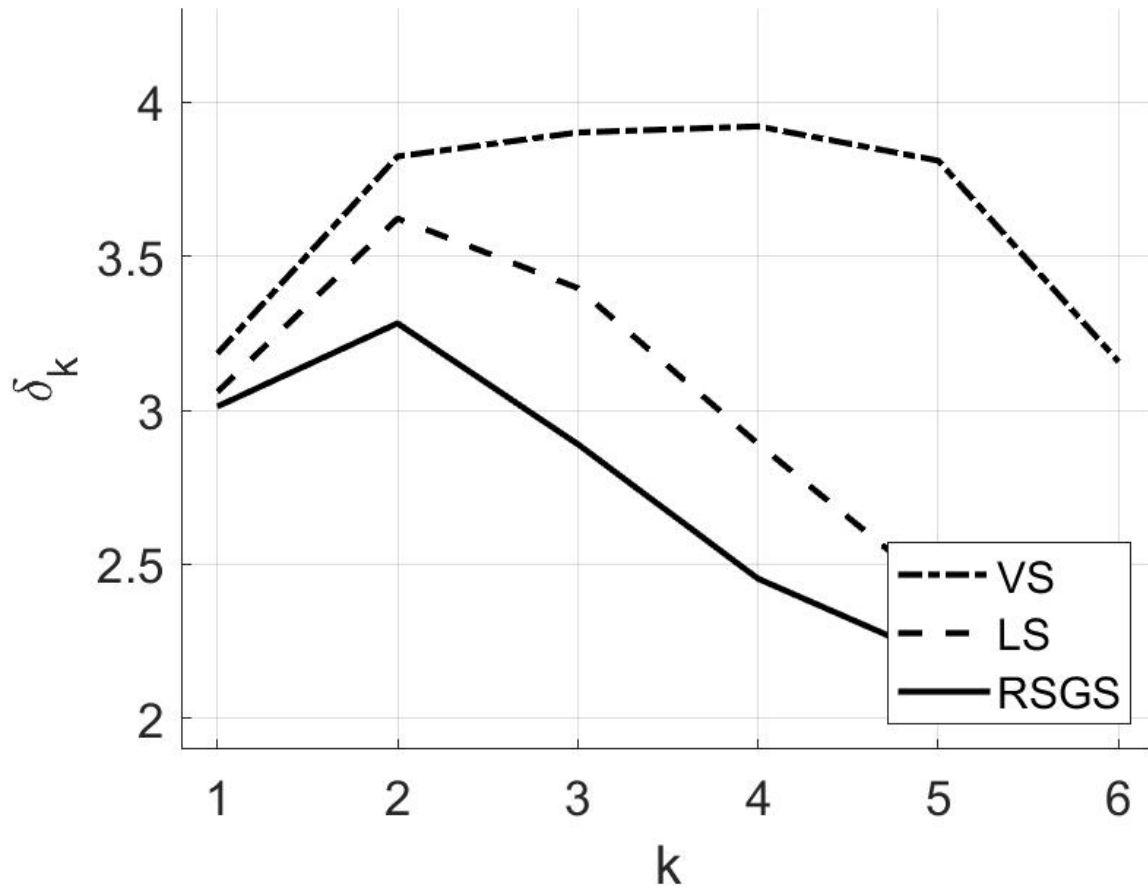


Рисунок 3.18 – Индикатор сходимости δ_k для модели среды с контактом слоя идеальной жидкости и неоднородного изотропного упругого слоя с негладкими границами разрыва коэффициентов по результатам вычислений с использованием схемы на сдвинутых сетках (VS), схемы на повернутых сетках (RSGS) и схемы Лебедева (LS).

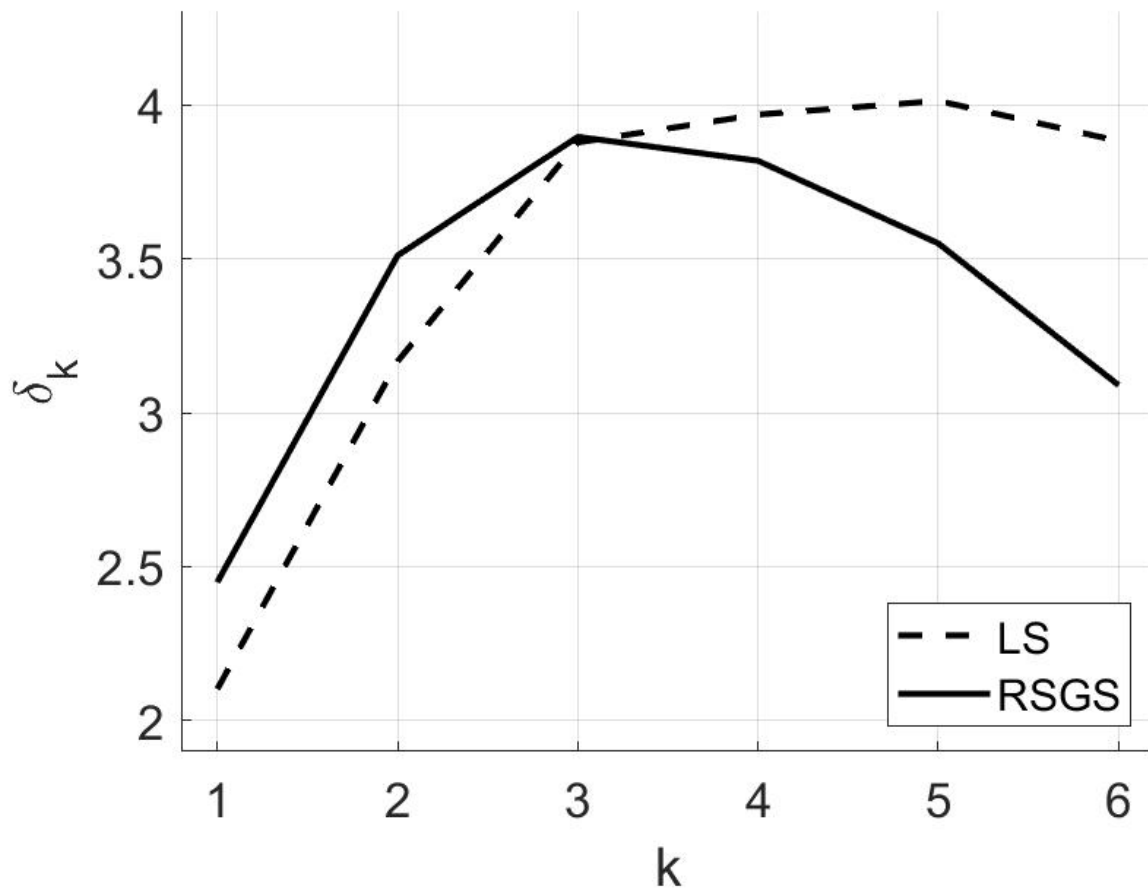


Рисунок 3.19 – Индикатор сходимости δ_k для модели анизотропной упругой среды из однородного и неоднородного слоев по результатам вычислений с использованием схемы на повернутых сетках (RSGS) и схемы Лебедева (LS) .

В третьей модели упругой среды слои анизотропные: сверху однородный слой с параметрами $\rho = 1800 \text{ кг/м}^3$,

$$C = \begin{pmatrix} 3.6 & 1.8 & -0.9 \\ 1.8 & 3.24 & 0 \\ -0.9 & 0 & 2.7 \end{pmatrix} \times 10^9, \frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{м}^3},$$

часть слоя внизу слева с параметрами $\rho = 2200 \text{ кг/м}^3$,

$$C = \begin{pmatrix} 4.4 & 2.2 & 2.2 \\ 2.2 & 6.6 & 2.2 \\ 2.2 & 2.2 & 4.4 \end{pmatrix} \times 10^9, \frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{м}^3},$$

часть слоя внизу справа с параметрами $\rho = 1600 \text{ кг/м}^3$,

$$C = \begin{pmatrix} 1.6 & 0.8 & 0.8 \\ 0.8 & 2.4 & 0.8 \\ 0.8 & 0.8 & 1.6 \end{pmatrix} \times 10^9, \frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{м}^3}.$$

Индикатор сходимости δ_k , вычисленный по ряду решений конечно-разностных задач для схемы Лебедева и схемы на повернутых сетках, принимает значения от 3 до 4 (Рисунок 3.19), что позволяет предполагать второй порядок сходимости для обеих использованных схем.

В четвертой модели — сверху слой идеальной жидкости с параметрами $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $c = 1500 \text{ м/с}$, внизу — неоднородный анизотропный упругий слой: часть слоя внизу слева с параметрами $\rho = 2200 \text{ кг/м}^3$,

$$C = \begin{pmatrix} 4.4 & 2.2 & 2.2 \\ 2.2 & 6.6 & 2.2 \\ 2.2 & 2.2 & 4.4 \end{pmatrix} \times 10^9, \frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{м}^3},$$

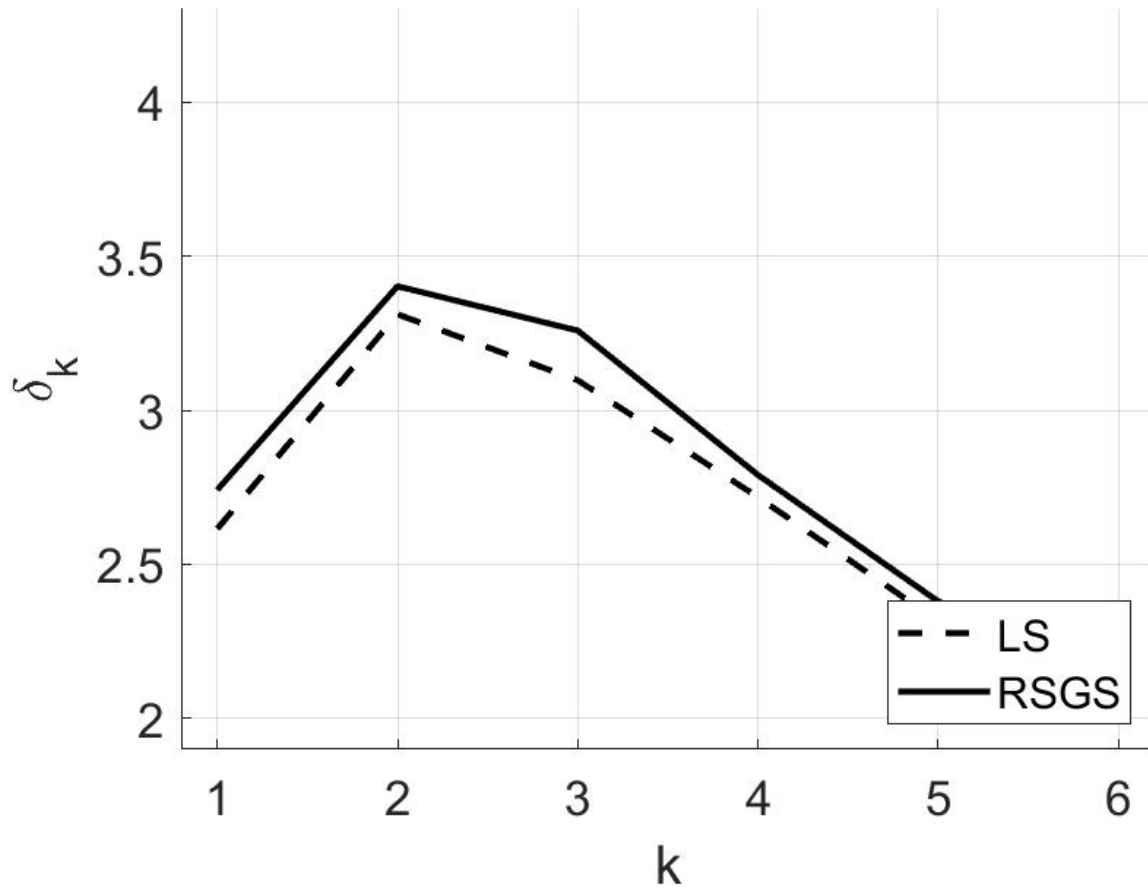


Рисунок 3.20 – Индикатор сходимости δ_k для модели среды с контактом слоя идеальной жидкости и неоднородного анизотропного упругого слоя с негладкими границами разрыва коэффициентов по результатам вычислений с использованием схемы на повернутых сетках (RSGS) и схемы Лебедева (LS).

часть слоя внизу справа с параметрами $\rho = 1600$ кг/м³,

$$C = \begin{pmatrix} 1.6 & 0.8 & 0.8 \\ 0.8 & 2.4 & 0.8 \\ 0.8 & 0.8 & 1.6 \end{pmatrix} \times 10^9, \frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{м}^3}.$$

Значения индикатора сходимости δ_k , вычисленные по ряду решений конечно-разностных задач для схемы Лебедева и схемы на повернутых сетках, приближаются к 2 с увеличением k (Рисунок 3.20), что четко показывает первый порядок сходимости решения для обеих схем.

Таким образом, в целом результаты численных экспериментов указывают на первый порядок сходимости всех конечно-разностных схем на частично разнесенных сетках для произвольной неоднородной среды, т.е. уменьшая шаг дискретизации по пространству, можно получить численное сеточное решение, приближающее решение исходной дифференциальной задачи сколь угодно точно.

Результаты численных экспериментов показывают, что вертикальные и горизонтальные границы разрыва параметров среды аппроксимируются конечно-разностными схемами на частично разнесенных сетках лучше наклонных и криволинейных. Например, для модели горизонтально-слоистой среды можно предположить второй порядок сходимости численного решения к точному. С другой стороны, при численном моделировании волновых полей, значительно зависящих от каких-то контрастных криволинейных структур модели, точности схем на частично разнесенных сетках может оказаться недостаточно. Например, для более точного описания распространения волн в среде около скважины используют конечно-разностные схемы для цилиндрической системы координат [Pissarenko et al., 2009; Pissarenko et al., 2010], а для описания сложной топографии поверхности — метод конечных элементов [Moczko et al., 1997; Galis et al., 2008] и разрывный метод Галеркина [Лисица, Чеверда, 2014; Lisitsa et al., 2016].

3.3 Численное моделирование волновых полей в горизонтально-слоистых анизотропных средах

Разработанный на основе конечно-разностной схемы Лебедева алгоритм численного моделирования распространения сейсмических волн реализован в виде научно-исследовательской версии программного обеспечения (раздел 3.1.2) [Lisitsa, Vishnevskiy, 2010]. Корректность работы программного обеспечения протестирована на однородных трехмерных анизотропных средах (раздел 3.1.3) [Lisitsa, Vishnevskiy, 2010]. Результаты численного исследования подтверждают сходимость схемы Лебедева для неоднородных анизотропных и изотропных сред (раздел 3.2) [Vishnevsky et al., 2014]. Это позволяет применять программную реализацию алгоритма для решения прикладных задач геофизики: рассчитывать волновые поля в трехмерных анизотропных упругих моделях реальных геологических объектов, для изучения связи структуры таких объектов и волновых полей в них с целью развития методов определения структуры и упругих свойств горных пород по данным сейсмических наблюдений для поиска полезных ископаемых и увеличения добычи в найденных месторождениях.

В прикладных задачах входными данными для алгоритма является упругая трехмерная анизотропная модель геологической среды и параметры системы наблюдений. Их построение — отдельная научно-техническая задача, которая решается соответствующими специалистами. Для полученной модели выполняется численное моделирование распространения сейсмических волн с использованием разработанного на основе конечно-разностной схемы Лебедева алгоритма решения прямой задачи [Lisitsa, Vishnevskiy, 2010], результатом которого являются численные волновые поля, соответствующие заданной системе наблюдений. Анализ этих волновых полей и интерпретация результатов также являются отдельной научной задачей, выполняемой соответствующими специалистами.

Алгоритм конечно-разностного моделирования на основе схемы Лебедева разработан для расчета волновых полей в произвольной модели трехмерной анизотропной упругой среды. Однако построение научно обоснованной трехмерной анизотропной модели геологической среды со сложной трехмерной геометрией геологических объектов — трудоемкая научная задача, а расчет волновых полей для таких моделей требует значительных вычислительных ресурсов (ядрочасов супер-

компьютерных кластеров). Поэтому в настоящее время разработанный алгоритм применяется для расчета волновых полей в горизонтально-слоистых моделях, описывающих участки земной коры с субгоризонтальным залеганием слоев. Такие модели значительно проще для построения, численное моделирование волновых полей для них требует значительно меньших вычислительных ресурсов.

3.3.1 Расчет волновых полей для горизонтально-слоистой среды с вертикально ориентированной трещиноватостью

Известно, что анизотропия распространения сейсмических волн может обуславливаться наличием соориентированных трещин в изотропной вмещающей среде. Например, субвертикальные трещины приводят к появлению трансверсально-изотропной анизотропии с горизонтальной осью симметрии. Причем степень сейсмической анизотропии увеличивается с увеличением трещиноватости. Прогноз концентрации и направленности трещин по сейсмической анизотропии для перехода к описанию емкостных и фильтрационных свойств резервуара является актуальной задачей при поиске и разработке нефтегазовых месторождений.

Для выделения эффектов сейсмической анизотропии объектов с вертикально-трещиноватым типом коллектора сотрудниками ООО «Тюменский нефтяной научный центр» О.А. Литтау и А.В. Новокрециным разработан метод нахождения коэффициентов отражения продольной плоской волны в азимутально-анизотропных средах на основе численного решения уравнения для коэффициентов отражения [Литтау, Вишневский и др., 2017]. Эта разработка является шагом вперед в развитии способов определения коэффициентов отражения, основанных на инверсии уравнения Рюгера, выведенном в предположении слабой анизотропии и слабой контрастности границы [Аки, Ричардс, 1983; Ruger, 2002]. Далее полученные коэффициенты применяются для решения задачи распространения сейсмических волн в лучевом приближении [Литтау, Вишневский и др., 2017].

Для подтверждения работоспособности названной разработки на «синтетических» сейсмических данных выполняется трехмерное численное сейсмическое моделирование на основе конечно-разностной схемы Лебедева [Lisitsa, Vishnevskiy, 2010]. Модель анизотропной упругой среды разработана специалистами этой же

организации по данным трещиноватых карбонатных отложений и фундамента одной из площадей Восточной Сибири. По ГИС о скоростях упругих волн, плотности и пористости пород, данным о типе и микроструктуре пород, данным ВСП и плотностного каротажа строится набор горизонтально-слоистых упругих моделей. Общим параметром набора моделей является плотность трещин, присутствующих в ряде слоев моделей и приводящих к появлению анизотропии распространения сейсмических волн в этих слоях.

Таблица 3.1 — Кровля и упругие параметры слоев модели I (по данным ООО «Тюменский нефтяной научный центр»)

Номер слоя	Кровля, м	V_p , м/с	V_s , м/с	ρ , г/см ³	ϵ	δ	γ
1	-321	2791	1069	1.8			
2	-102	5238	2756	2.4			
3	187	4803	2740	2.06			
4	308	6000	3177	2.71			
5	478	4880	2729	2.69			
6	618	5683	3019	2.65			
7	886	4786	2651	2.06			
8	1129	5846	3211	2.727	-0.016	-0.096	-0.079
9	1279	5747	3087	2.788	-0.015	-0.1	-0.085
10	1369	5669	3086	2.765	-0.015	-0.101	-0.085
11	1429	4510	2730	2.518			
12	1444	4261	2659	2.561	-0.011	-0.114	-0.082

Для численного сейсмического моделирования волновых полей выделяются три горизонтально-слоистые сейсмогеологические модели среды, содержащие 12 однородных слоев, 8 из которых — изотропные, 4 — с трансверсально-изотропным типом анизотропии, соответствующим вертикально ориентированной трещинова-

тости. Геометрия каждого слоя описывается глубиной залегания его кровли и кровли нижележащего слоя.

Упругая среда для изотропных слоев 1-7 и 11 модели I описывается тремя параметрами: плотностью ρ , скоростью продольных волн V_p , скоростью поперечных волн V_s . Для четырех слоев с трансверсально-изотропной анизотропией упругая среда описывается ориентацией оси симметрии анизотропии и шестью параметрами: плотностью ρ , скоростью продольных V_p и поперечных V_s волн в направлении оси симметрии анизотропии и параметрами Томсена ϵ , δ , γ [Thomsen, 1986]. Значения этих параметров приводятся в таблицах.

Таблица 3.2 — Упругие параметры слоев с трансверсально-изотропной анизотропией модели II

Номер слоя	Кровля, м	V_p , м/с	V_s , м/с	ρ , г/см ³	ϵ	δ	γ
8	1129	5846	3211	2.727	-0.028	-0.154	-0.13
9	1279	5747	3087	2.788	-0.027	-0.155	-0.137
10	1369	5669	3086	2.765	-0.026	-0.156	-0.136
12	1444	4261	2659	2.561	-0.017	-0.172	-0.127

Таблица 3.3 — Упругие параметры слоев с трансверсально-изотропной анизотропией модели III

Номер слоя	Кровля, м	V_p , м/с	V_s , м/с	ρ , г/см ³	ϵ	δ	γ
8	1129	5846	3211	2.727	-0.039	-0.194	-0.168
9	1279	5747	3087	2.788	-0.037	-0.192	-0.173
10	1369	5669	3086	2.765	-0.037	-0.194	-0.172
12	1444	4261	2659	2.561	-0.023	-0.212	-0.162

Ось симметрии анизотропии для всех анизотропных слоев всех моделей лежит в горизонтальной плоскости XU , что соответствует вертикальной трещиноватости, направление оси симметрии анизотропии составляет 55° от оси Y в направлении оси X .

Для моделей II и III геометрия слоев и упругие параметры изотропных слоев 1-7 и 11 совпадают с соответствующими параметрами модели I (Таблица 3.1). Степень анизотропии (параметры Томсена ϵ , δ , γ), связанная с увеличением концентрации трещин в слое, для анизотропных слоев 8-10 и 12 всех моделей различается (Таблицы 3.1, 3.2 и 3.3). Для всех анизотропных слоев степень анизотропии увеличивается от модели I к модели III, что также видно по индикатрисам групповых скоростей в горизонтальной плоскости для анизотропных слоев модели I (Рисунок 3.21), модели II (Рисунок 3.22), модели III (Рисунок 3.23).

Расчет волновых полей выполняется при помощи разработанного на основе конечно-разностной схемы Лебедева алгоритма [Lisitsa, Vishnevskiy, 2010] с использованием слабоотражающих слоев М-РМЛ на границах вычислительной области [Дмитриев, Лисица, 2011; Дмитриев, Лисица, 2012]. Для этого строится трехмерная конечно-разностная сетка с шагами дискретизации $h_x = h_y = h_z = 2.5$ м размером $N_x = 4000$, $N_y = 4000$, $N_z = 810$ ячеек, включающая М-РМЛ-слой шириной 50 точек и свободную поверхность для $Z = 0$. Вычисления выполняются с использованием 1024 процессорных ядер кластера «Ломоносов-1» Научно-исследовательского вычислительного центра Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Время вычислений для одной модели и одного источника — около 15 часов.

Для возбуждения сейсмических волн используется источник типа вертикальной силы, расположенный в начале координат на свободной поверхности. В качестве функции источника используется импульс Риккера с центральной частотой 30 Гц. Длина записи составляет 3 с, шаг дискретизации по времени — 1 мс.

Для записи «синтетических» сейсмограмм моделируется площадная регулярная центральная система наблюдений типа «крест» с параметрами:

- шаг дискретизации — 1 мс;
- длина записи — 3 с;
- размер бина — 25×25 м;

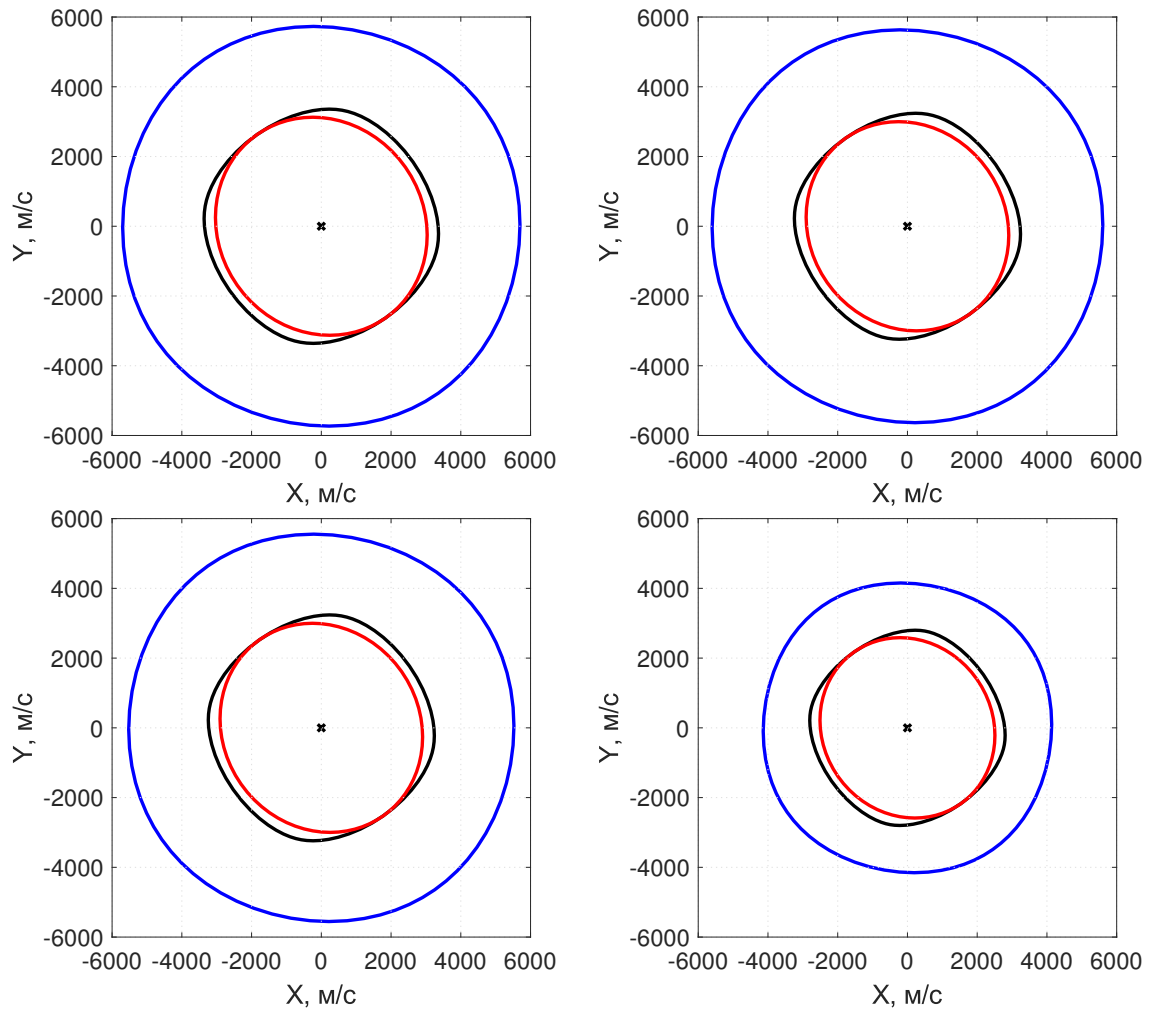


Рисунок 3.21 — Индикатрисы групповых скоростей в анизотропных слоях модели I: для слоя 8 (вверху слева), для слоя 9 (вверху справа), для слоя 10 (внизу слева), для слоя 12 (внизу справа), синяя линия соответствует квазипродольной волне (qP), черная линия — быстрой квазипоперечной (qSH), красная линия — медленной квазипоперечной (qSV)

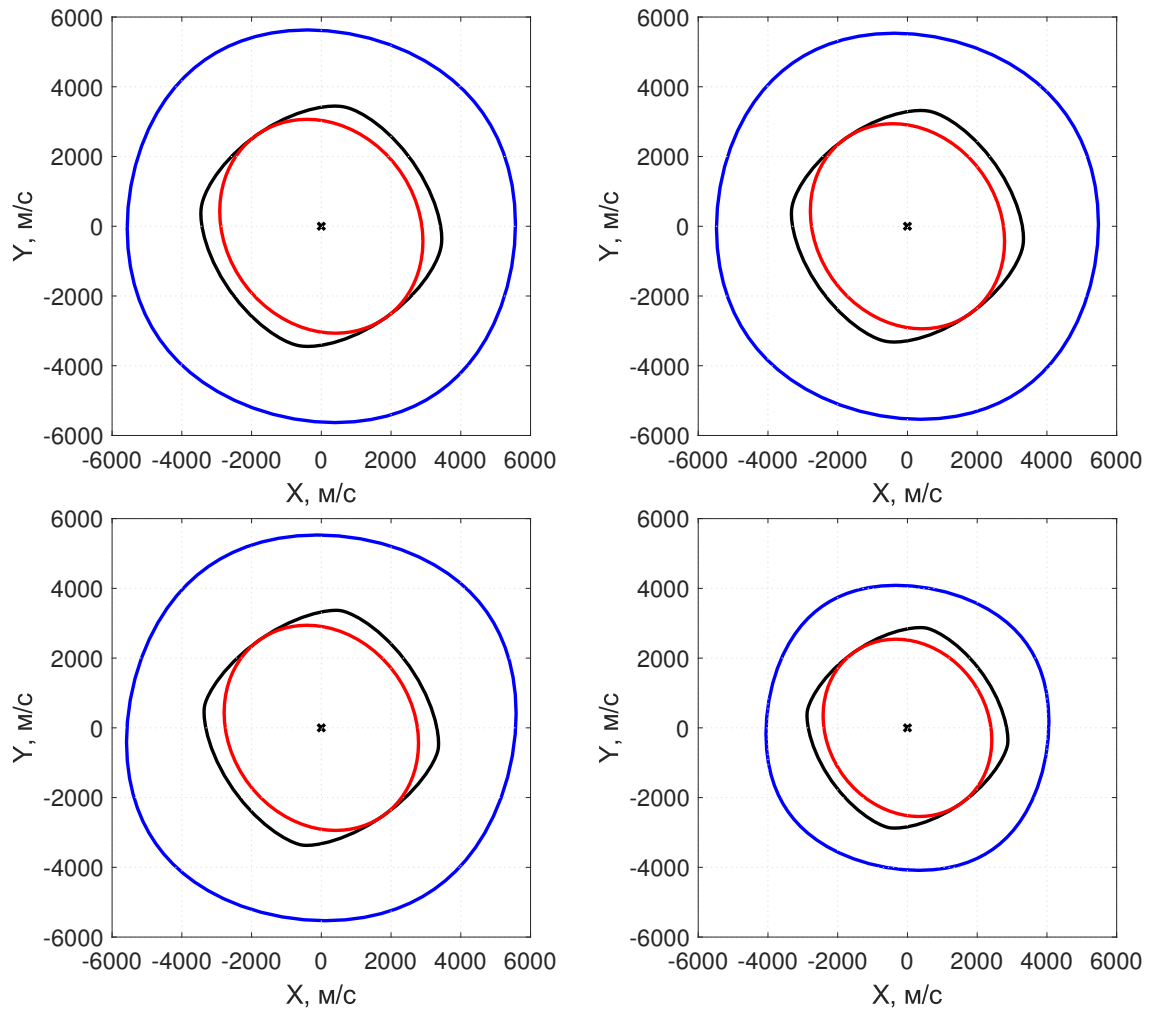


Рисунок 3.22 — Индикатрисы групповых скоростей в анизотропных слоях модели II: для слоя 8 (вверху слева), для слоя 9 (вверху справа), для слоя 10 (внизу слева), для слоя 12 (внизу справа), синяя линия соответствует квазипродольной волне (qP), черная линия — быстрой квазипоперечной (qSH), красная линия — медленной квазипоперечной (qSV)

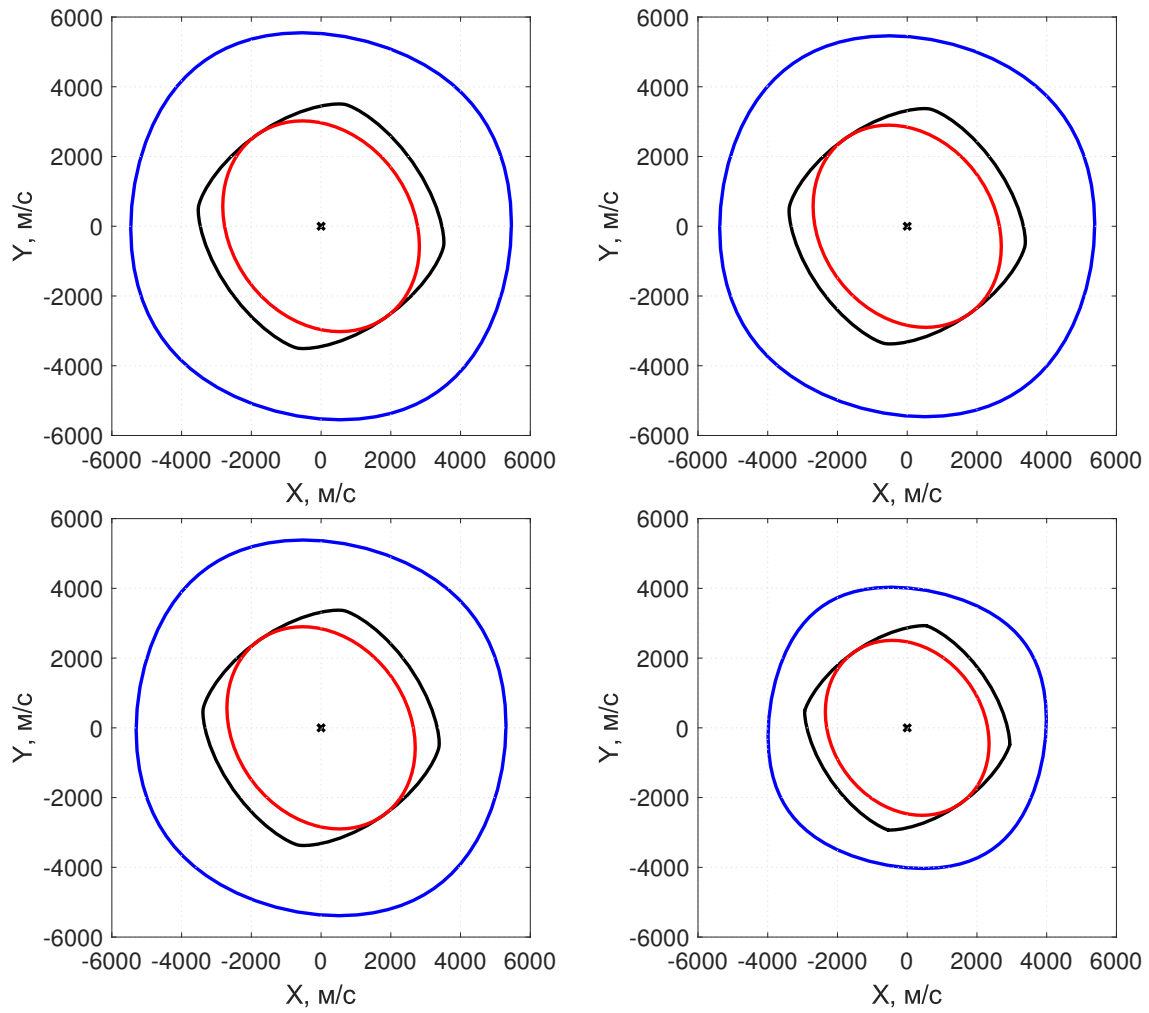


Рисунок 3.23 — Индикатрисы групповых скоростей в анизотропных слоях модели III: для слоя 8 (вверху слева), для слоя 9 (вверху справа), для слоя 10 (внизу слева), для слоя 12 (внизу справа), синяя линия соответствует квазипродольной волне (qP), черная линия — быстрой квазипоперечной (qSH), красная линия — медленной квазипоперечной (qSV)

- количество источников — 169;
- количество линий источников — 13;
- количество приемников — 5040;
- количество приемных линий — 36;
- расстояние между источниками на линии возбуждения — 200 м;
- расстояние между линиями возбуждения — 200 м;
- расстояние между приемниками на линии возбуждения — 50 м;
- расстояние между линиями приема — 200 м.

Геометрия взаимного расположения источников и приемников системы наблюдения представлена на схеме (Рисунок 3.24).

Поскольку система наблюдений насчитывает 169 источников, то подразумевается 169-кратное повторение расчетов (для каждого источника). Но в силу того, что рассматривается плоскостная модель упругой среды, достаточно выполнить вычисления для одного источника (с несколько большей пространственной системой наблюдений) и получить сейсмограммы для остальных источников при помощи сдвига.

Дополнительно производится запись 13 «синтетических» сейсмограмм вертикального сейсмического профилирования (ВСП) в скважине, совпадающей с источником по X и Y координатам, и в скважинах с азимутами 45, 90, 135 и 180° и выносами 300, 600 и 1000 м для каждого азимута. Шаг записи сейсмограмм ВСП по глубине — 5 м. На схеме взаимного расположения скважин ВСП относительно источника сейсмического сигнала (Рисунок 3.25) эти скважины изображены красным цветом. Данные для 12 сейсмограмм ВСП для скважин с азимутами 0, 225, 270, 315° и выносами 300, 600, 1000 м для каждого азимута получаются из предыдущих и из свойства центральной симметрии решения задачи относительно источника. На схеме (Рисунок 3.25) эти скважины изображены серым цветом.

На изображениях рассчитанных сейсмограмм одной линии поверхностной системы наблюдений (Рисунки 3.26, 3.27) виден высокий уровень низкоскоростных помех, связанных с поверхностной волной Рэлея, возникающей в верхних низкоскоростных слоях модели. При реальных полевых сейсмических наблюдениях эта волна существенно меньше за счет поглощения сейсмических волн в верхней низкоскоростной части разреза. При расчете «синтетических» волновых полей погло-

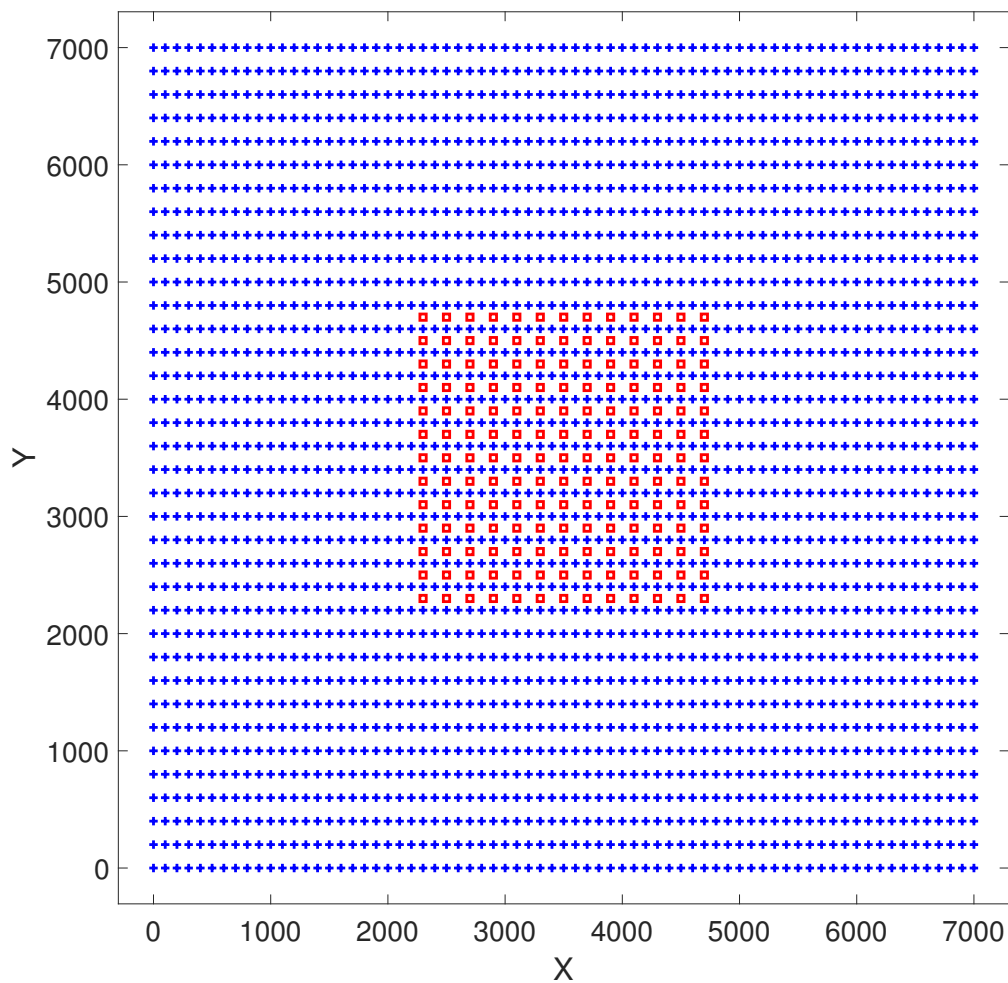


Рисунок 3.24 — Схема взаимного пространственного расположения источников (красные квадраты) и приемников (синие плюсы) системы наблюдений типа «крест», для линии приемников показан каждый четвертый

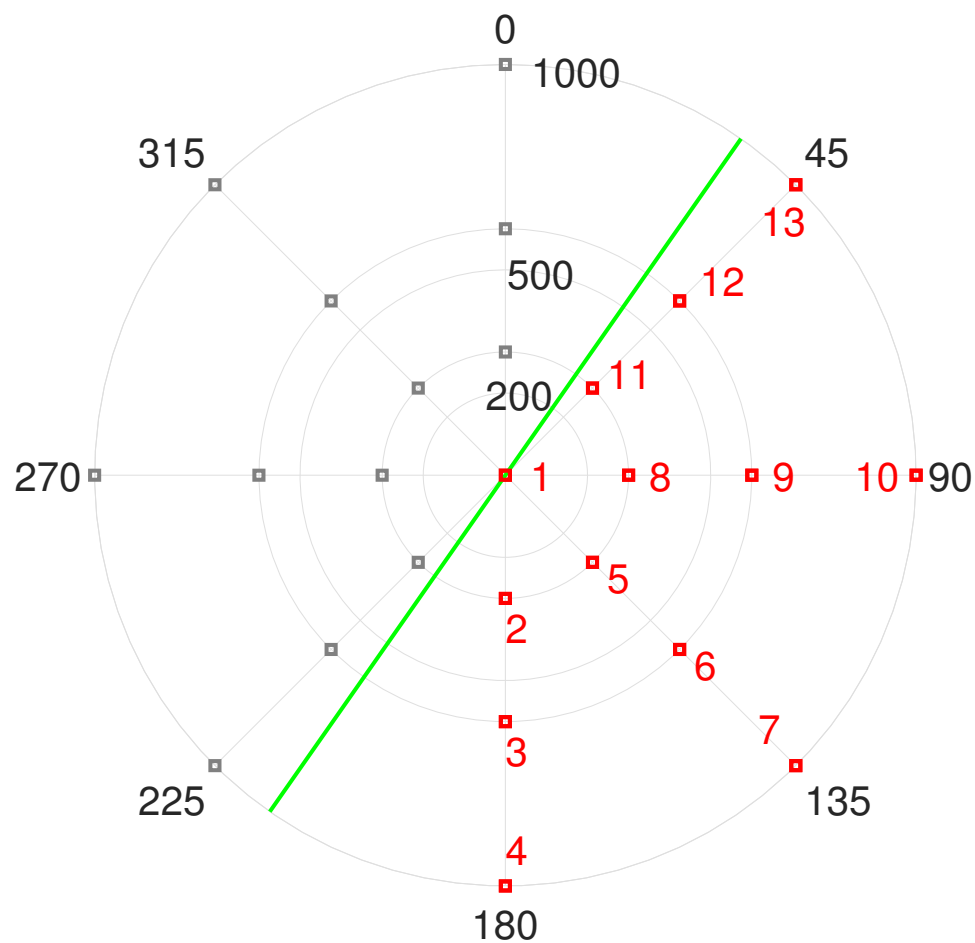


Рисунок 3.25 — Схема расположения скважин ВСП (красные квадраты — рассчитываемые, серые квадраты — получаемые из симметрии) и направление оси симметрии анизотропии (зеленая линия), расположение источника совпадает с положением скв. 1

щение не учитывается, вследствие чего амплитуда волны Рэлея на рассчитанных сейсмограммах значительно выше и совпадает по частотам с целевыми отраженными волнами, что затрудняет ее подавление спектральными методами. Однако благодаря стабильности формы импульса при обработке удастся практически полностью ее устранить направленным вычитанием.

На изображениях Z-компоненты рассчитанных сейсмограмм ВСП для скв. №7 (Рисунок 3.28), расположенной относительно источника близко к направлению, перпендикулярному оси симметрии анизотропии (азимуты 135° и 145°), вдоль которого скорости квазипоперечных волн постоянны для всех трех моделей, визуально незаметна разница в сейсмограммах для разных моделей.

На изображениях Z-компоненты рассчитанных сейсмограмм ВСП для модели III для скв. №7 и №13 (Рисунок 3.29), вторая из которых расположена относительно источника близко к направлению оси симметрии анизотропии (азимуты 35° и 45°), где различие скоростей квазипоперечных волн максимально, разница сейсмограмм становится визуально заметной: например, это видно по отраженным восходящим поперечным волнам от границы слоев на глубине 1444 м. Также наблюдается различие сейсмограмм, связанное с увеличением степени анизотропии от модели I к модели III.

На изображениях X-компоненты рассчитанных сейсмограмм ВСП для скв. №7 (Рисунок 3.30) видно отсутствие сигнала до взаимодействия прямой волны с анизотропной средой и его появление после взаимодействия (в случае изотропной среды сигнала не было бы совсем). Также становится заметным увеличение количества отраженных от нижней границы нижнего анизотропного слоя поперечных волн за счет частичного разделения быстрой и медленной квазипоперечных волн для модели III с большей степенью анизотропии, для модели II разница скоростей меньше и быстрая и медленная квазипоперечные волны интерферируют.

Последующие обработка и анализ рассчитанных данных выполняются специалистами ООО «Тюменский нефтяной научный центр» [Литтау, Вишневский и др., 2017].

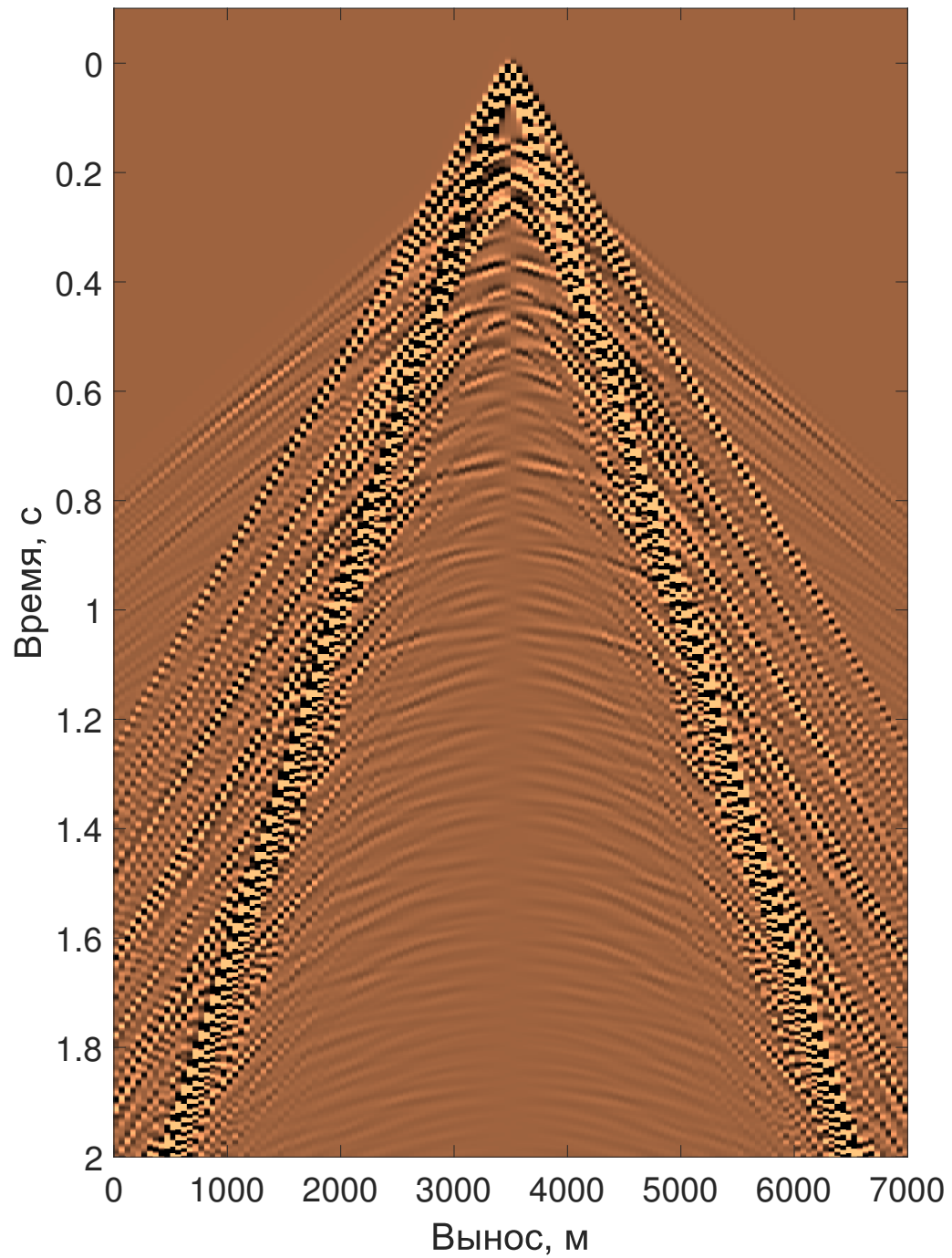


Рисунок 3.26 — X-компонента вектора скорости смещений на сейсмограмме для модели III, центрального источника и линии приемников $Y = 3350$ м

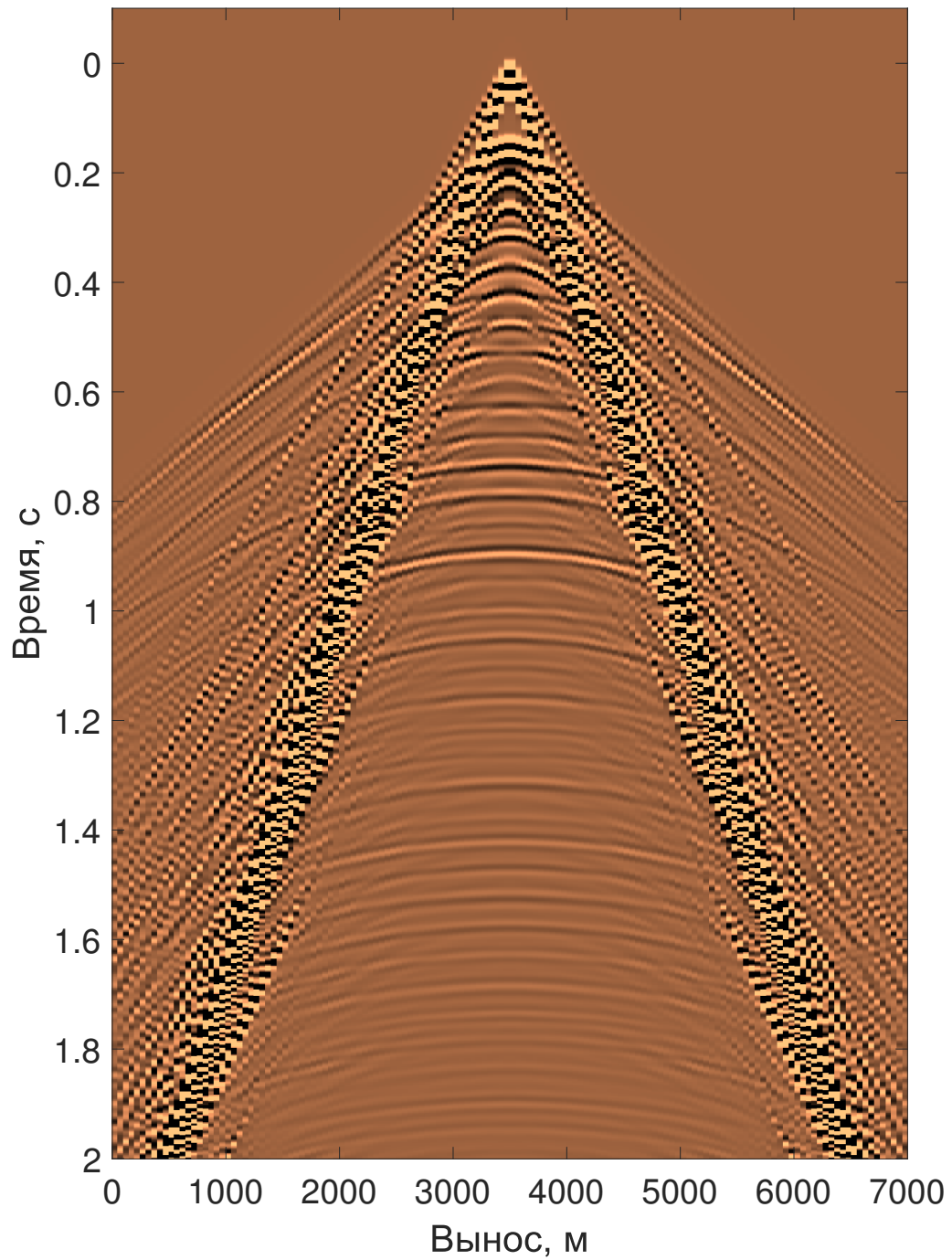


Рисунок 3.27 — Z-компонента вектора скорости смещений на сейсмограмме для модели III, центрального источника и линия приемников $Y = 3350$ м

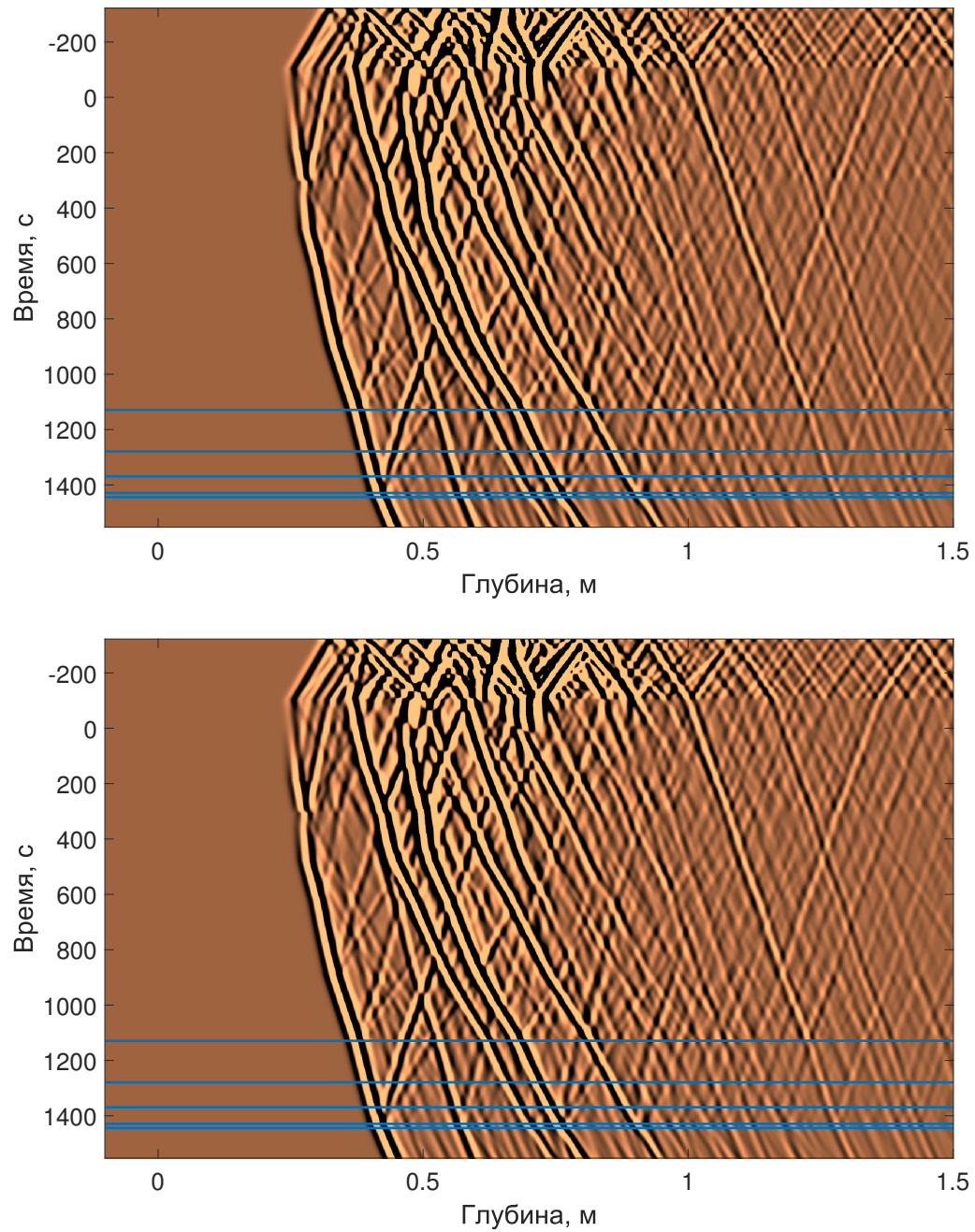


Рисунок 3.28 — Z-компонента вектора скорости смещения на сейсмограмме ВСП для скв. №7 для модели II (вверху) и модели III (внизу), синие линии — границы анизотропных слоев

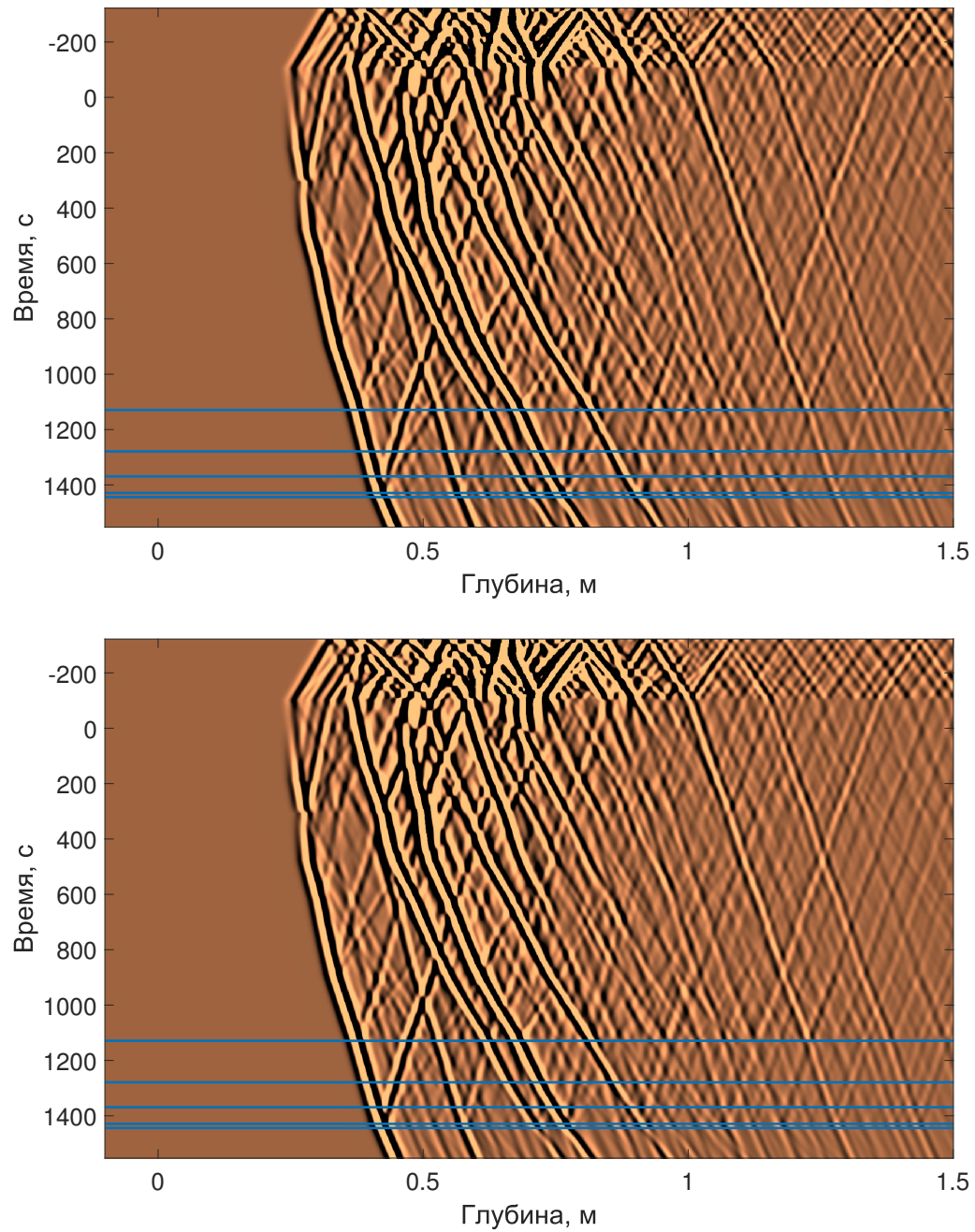


Рисунок 3.29 — Z-компонента вектора скорости смещения на сейсмограмме ВСП для скв. №7 (вверху) и скв. №13 (внизу) для модели III, синие линии — границы анизотропных слоев

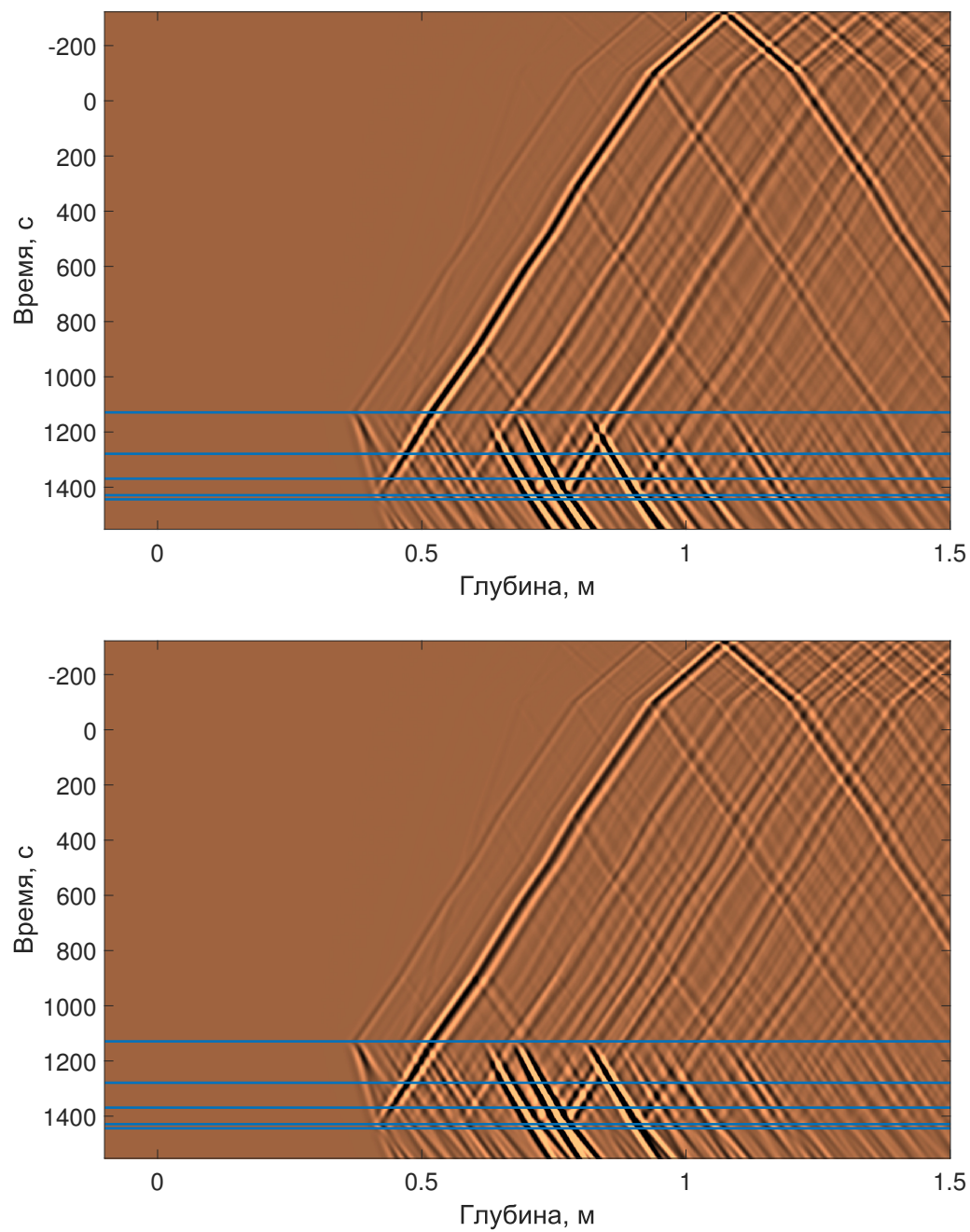


Рисунок 3.30 — X-компонента вектора скорости смещения на сейсмограмме ВСП для скв. №10 для модели II (вверху) и модели III (внизу), синие линии — границы анизотропных слоев

3.3.2 Расчет волновых полей для слоистой модели

Юрубчено-Тохомской зоны нефтегазонакопления

Юрубчено-Тохомская зона нефтегазонакопления (ЮТЗ) — крупное нефтегазовое месторождение в Красноярском крае, связанное с рифейскими карбонатными и терригенными отложениями. Коллектор — каверново-трещинный, для трещин характерны субвертикальные углы падения [Конторович и др., 1996]. Проницаемость и фильтрационные свойства коллектора также обусловлены ориентацией трещин, поэтому определение параметров трещиноватости — необходимо при планировании эксплуатационных скважин (перпендикулярно трещиноватости).

С направленной трещиноватостью связана сейсмическая анизотропия свойств пород, слагающих коллектор: субвертикальные трещины порождают трансверсально-изотропную анизотропию с горизонтальной осью симметрии. В то же время для Юрубчено-Тохомской зоны нет характерного направления трещиноватости по латерали. Следовательно, анизотропные свойства коллектора пространственно неоднородны, а выделение направления трещиноватости сейсмическими методами — актуальная задача геофизики.

Определение направления горизонтальной оси симметрии анизотропии (значит и направления трещиноватости) возможно по наблюдаемому сейсмическими методами расщеплению быстрой и медленной квазипоперечных волн. Однако сейсмическая анизотропия вышележащих отложений искажает волновую картину этого расщепления, связанную с анизотропией нижележащих отложений, и требует компенсации в данных влияния анизотропии вышележащих слоев. Для этого необходимо определить латеральные изменения направления оси симметрии анизотропии коллектора с компенсацией расщепления квазипоперечных волн верхней части разреза [Горшкалев, Вишневский и др., 2016а; Горшкалев, Вишневский и др., 2016b].

В связи с этим специалистами-сейсмиками ИНГГ СО РАН С.Б. Горшкалевым, В.В. Карстеным и др. по скоростным данным о Юрубчено-Тохомской зоны строится трехмерная модель анизотропной упругой среды. Модель не является точным представлением реального геологического объекта, а предназначена для расчета волновых полей, которые используются для апробации способов определения переменного по латерали направления оси симметрии анизотропии. За ее

основу взята скоростная горизонтально-слоистая модель Юрубчено-Тохомской зоны с двумя анизотропными слоями [Горшкалев и др., 2004]. Верхний анизотропный слой моделирует распространенную в данном районе анизотропию верхней части разреза [Горшкалев и др., 2007] и искажает волновую картину разделения квазипоперечных волн, связанную с нижним анизотропным слоем. Нижний анизотропный слой — целевой, он соответствует нефтегазоносному коллектору.

Модель состоит из 11 слоев, из которых изотропные — 2-9-ые и 11-й, анизотропные — 1-й и 10-й с трансверсально-изотропным типом анизотропии, ось симметрии которой лежит в горизонтальной плоскости. В направлении оси симметрии анизотропии вводится линейная изменчивость в зависимости от координаты X (направленной на восток) в обоих анизотропных слоях (Рисунок 3.31). От координаты Y (направленной на север) направление оси анизотропии не зависит.

Кроме направления оси анизотропии, каждый из 11 слоев модели Юрубчено-Тохомской зоны описывается семью параметрами: глубиной залегания кровли, скоростью продольных волн V_p , скоростью поперечных волн V_s (для анизотропных слоев — это скорости квазипродольной и квазипоперечных волн в направлении оси симметрии анизотропии), плотностью ρ и параметрами Томсена ϵ , δ , γ (Таблица 3.4). Для анизотропных слоев 1 и 10 построены индикатрисы групповых скоростей (Рисунок 3.32), для направления оси симметрии анизотропии — вдоль оси координат Y .

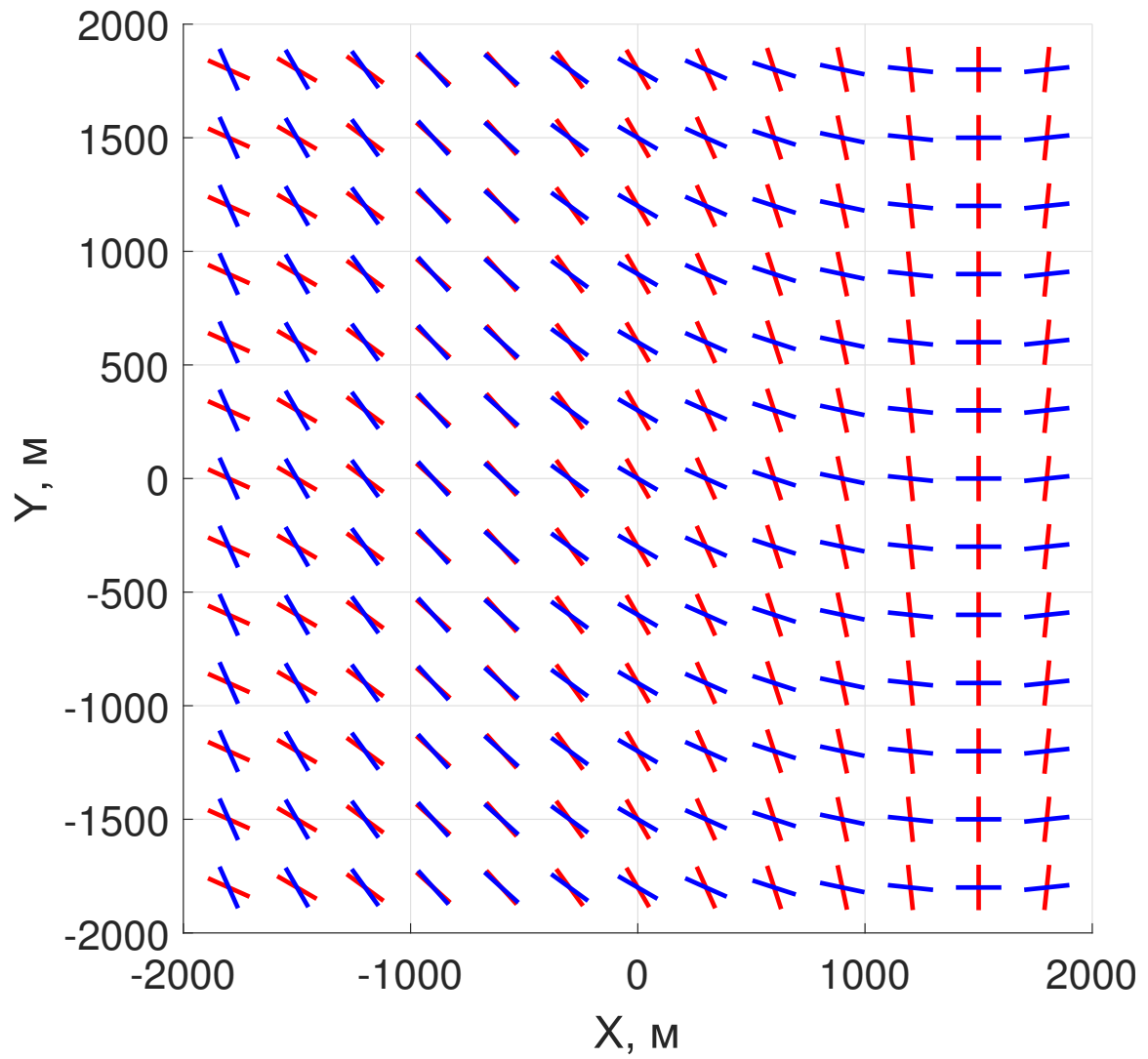


Рисунок 3.31 — Изменение направления оси симметрии сейсмической анизотропии в зависимости от координат X и Y (верхний слой 1 - красные линии, нижний слой 10 - синие линии)

Таблица 3.4 — Параметры слоев трехмерной анизотропной упругой модели Юрубчено-Тохомской зоны [Горшкалев, Вишневский и др., 2016a; Горшкалев, Вишневский и др., 2016b]

Номер слоя	Кровля, м	V_p , м/с	V_s , м/с	ρ , г/см ³	ϵ	δ	γ
1	0	2000	900	2.1	0.138	0.084	0.138
2	170	3600	1700	2.4			
3	470	5600	3100	2.65			
4	870	6500	3500	2.75			
5	1070	4800	2700	2.5			
6	1320	6100	3200	2.7			
7	1600	5250	2850	2.6			
8	2100	6300	3400	2.75			
9	2220	5300	2800	2.6			
10	2300	6900	3400	2.8	0.105	0.057	0.105
11	2760	3700	1500	2.4			

Хотя рассматриваемая модель Юрубчено-Тохомской зоны горизонтально-слоистая, но направление оси симметрии анизотропии внутри слоев меняется. Изменчивость скоростей распространения волн в модели не становится трехмерной (зависит только от координаты X), однако, в отличие от моделей из раздела 3.3.1, где изменение свойств модели одномерно, для модели Юрубчено-Тохомской зоны оно двумерно.

Расчет волновых полей выполняется с использованием разработанного на основе конечно-разностной схемы Лебедева алгоритма [Lisitsa, Vishnevskiy, 2010] и слабоотражающих слоев М-PML на границах вычислительной области [Дмитриев, Лисица, 2011; Дмитриев, Лисица, 2012]. Для вычислений используется трехмерная конечно-разностная сетка с шагами дискретизации $h_x = h_y = h_z = 1.66$ м размеров $N_x = 3000$, $N_y = 3000$, $N_z = 2100$ ячеек. Ширина слабоотражающего М-PML-

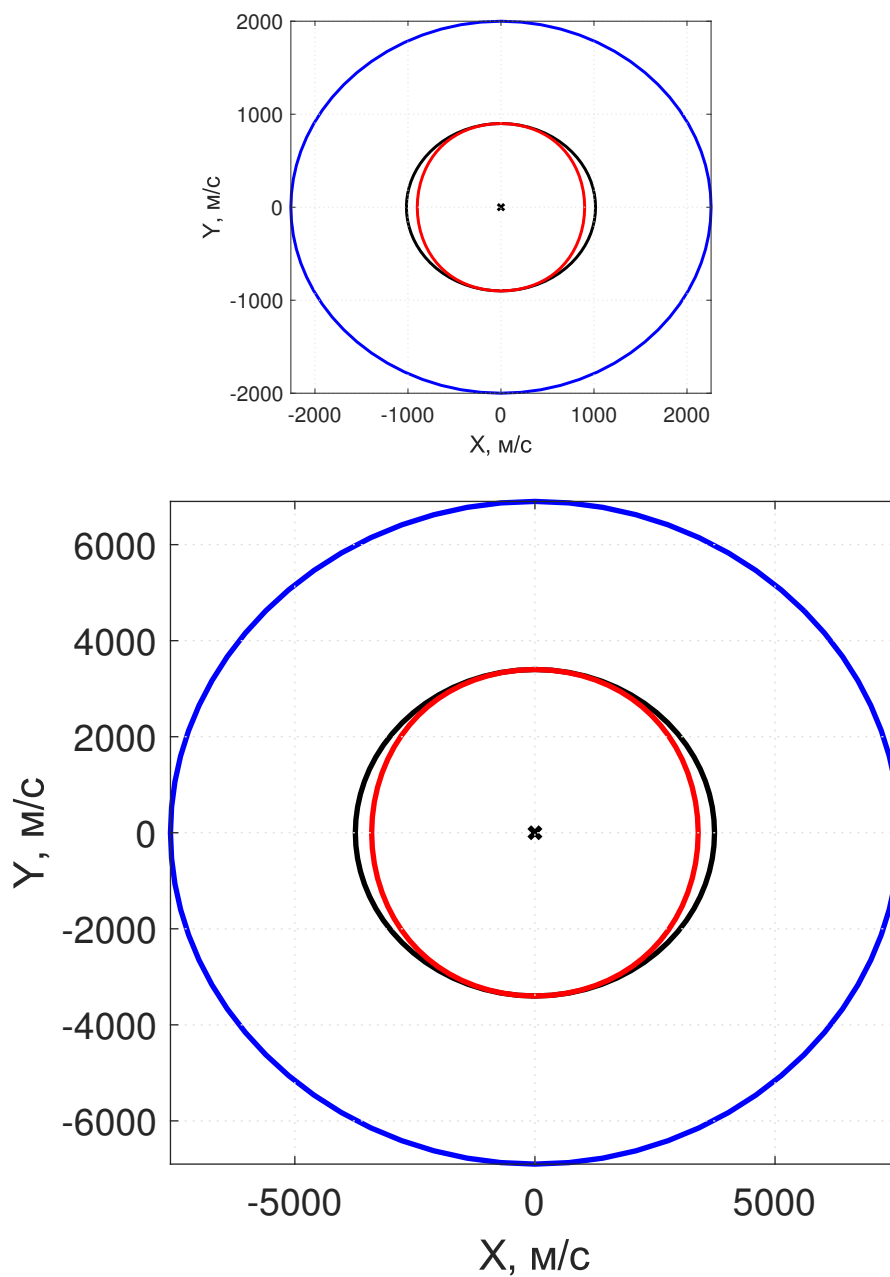


Рисунок 3.32 — Индикатрисы групповых скоростей в анизотропных слоях модели Юрубчено-Тохомской зоны с направлением оси симметрии анизотропии вдоль координатной оси Y для слоя 1 (вверху), для слоя 10 (внизу), синяя линия — квазипродольная волна (qP), черная линия — быстрая квазипоперечная (qSH), красная линия — медленная квазипоперечная (qSV)

слоя — 50 точек. Нецелый шаг дискретизации сетки по пространству выбирается из соображений получения приемлемого уровня численной дисперсии решения и при минимально возможных требуемых для вычислений компьютерных ресурсах. Например, с использованием шага дискретизации $h = 1.5$ м время расчетов увеличивается в полтора раза при том же количестве используемых вычислительных ядер суперкомпьютера. При этом на шаг сетки налагается условие кратности шагу по пространству системы наблюдения, который составляет 10 м.

Для вычислений используются 4096 процессорных ядер кластера «Ломоносов-2» Научно-исследовательского вычислительного центра Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Время вычислений — около 22 часов.

Для возбуждения сейсмических волн используется источник типа вертикальной силы, расположенный в начале координат. В качестве функции источника используется импульс Рикера с центральной частотой 50 Гц. Чтобы избежать появления низкоскоростных помех, связанных с волной Рэлея на свободной поверхности, верхний слой модели распространяется на полупространство $Z < 0$, после чего вычислительная область ограничивается сверху слабоотражающими слоями при помощи приема M-PML [Дмитриев, Лисица, 2011; Дмитриев, Лисица, 2012].

В качестве системы наблюдения для записи рассчитанных сейсмограмм моделируются трехкомпонентные приемники для X-, Y- и Z-компонент вектора скорости смещения, расположенные на поверхности $Z = 0$ м в интервалах по X от -2000 до 2000 м, по Y также от -2000 до 2000 м, с шагом 10 м по обоим координатам. Волновые поля рассчитываются до времени 2.5 с, шаг дискретизации по времени — 2 мс. Данные этой системы наблюдения рассматриваются в виде мгновенных снимков волнового поля для разных моментов времени.

Дополнительно производится запись сейсмограмм вертикального сейсмического профилирования (ВСП). Скважины для записи сейсмограмм ВСП находятся в интервалах по X от -1500 до 1500 м с шагом 150 м и по Y от -1500 до 1500 м с шагом 150 м, они достигают глубины 2850 м с шагом записи по глубине 10 м.

Волновая картина рассчитанного волнового поля не проста, что видно по мгновенным снимкам на поверхности $Z = 0$ м для времени $t = 0.36$ с (Рисунок 3.33). Заметно отсутствие у некоторых волн какой-либо симметрии (осевой

или центральной) из-за отсутствия симметрии у модели, вследствие изменения направления оси симметрии анизотропии вдоль оси X в анизотропных слоях модели. Заметен высокий уровень численной дисперсии для низкоскоростной прямой квазипродольной волны.

На мгновенных снимках волнового поля на поверхности $Z = 0$ м для меньшего времени $t = 0.2$ с (Рисунок 3.34) волновая картина проста, что позволяет определить тип всех наблюдаемых на снимке волн и проверить соответствие результатов вычислений теории. На Z -компоненте вектора скорости смещения видна прямая квазипродольная (внешняя), обменная PP -волна — от границы раздела 1 и 2 слоев модели (в середине), прямая квазипоперечная (внутренняя) волны. Из теории для источника типа вертикальной силы и плоскости наблюдения $Z = 0$ м на X -компоненте вектора скорости смещений прямые волны отсутствуют [Гольдин, 2008], что согласуется с результатами расчетов. Источник расположен в анизотропном слое, поэтому анизотропия модели проявляется уже на малых временах наблюдения. Форма фронтов волн, наблюдаемых на мгновенных снимках волнового поля, близка индикатрисе групповых скоростей верхнего анизотропного слоя модели (Рисунок 3.32) и направлению оси симметрии анизотропии для $X = 0$ (Рисунок 3.31).

На изображениях Z -компоненты вектора скорости смещения рассчитанных сейсмограмм поверхностной системы наблюдения (Рисунок 3.35) видно различие в данных для линии приемников, расположенной вдоль оси координат X , и линии приемников, расположенной вдоль оси координат Y , которое объясняется анизотропией модели Юрубчено-Тохомской зоны. Также отмечается заметный уровень численной дисперсии для низкоскоростных поперечных волн в верхнем слое.

На изображениях X -компоненты рассчитанной сейсмограммы ВСП (Рисунок 3.36) для скважины, расположенной в начале координат, видно разделение квазипродольных волн в верхнем анизотропном слое. В нижнем анизотропном слое волны не успевают полностью разделиться, но увеличение длины волнового пакета (для нисходящих преломленных от верхней границы слоя квазипродольных волн и восходящих отраженных от нижней границы слоя квазипродольных волн) свидетельствует о наличии разделения.

Последующая обработка выполняется специалистами ИНГГ СО РАН С.Б.

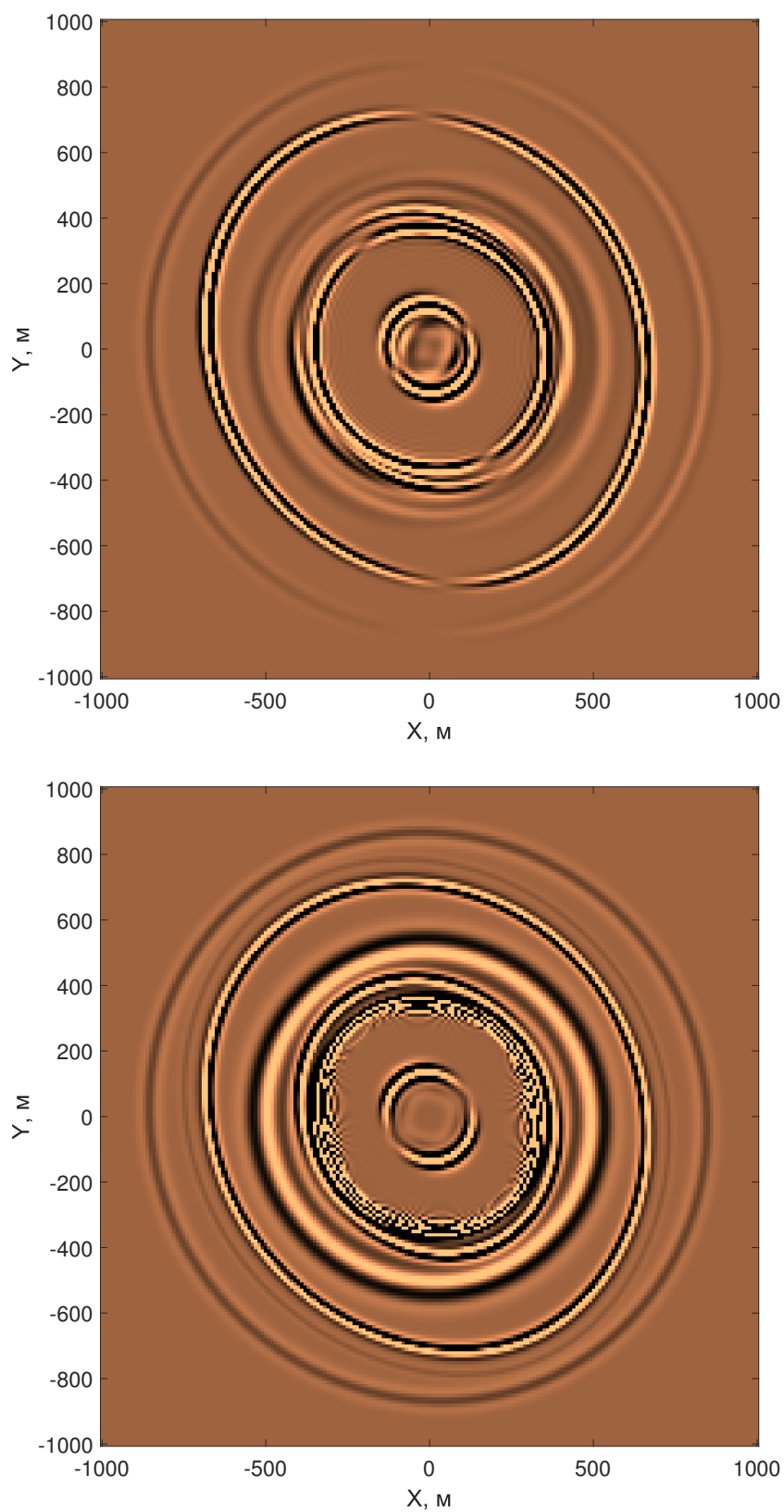


Рисунок 3.33 — Мгновенные снимки X-компоненты (вверху) и Z-компоненты (внизу) вектора скорости смещения на поверхности $Z = 0$ м для времени $t = 0.36$ с

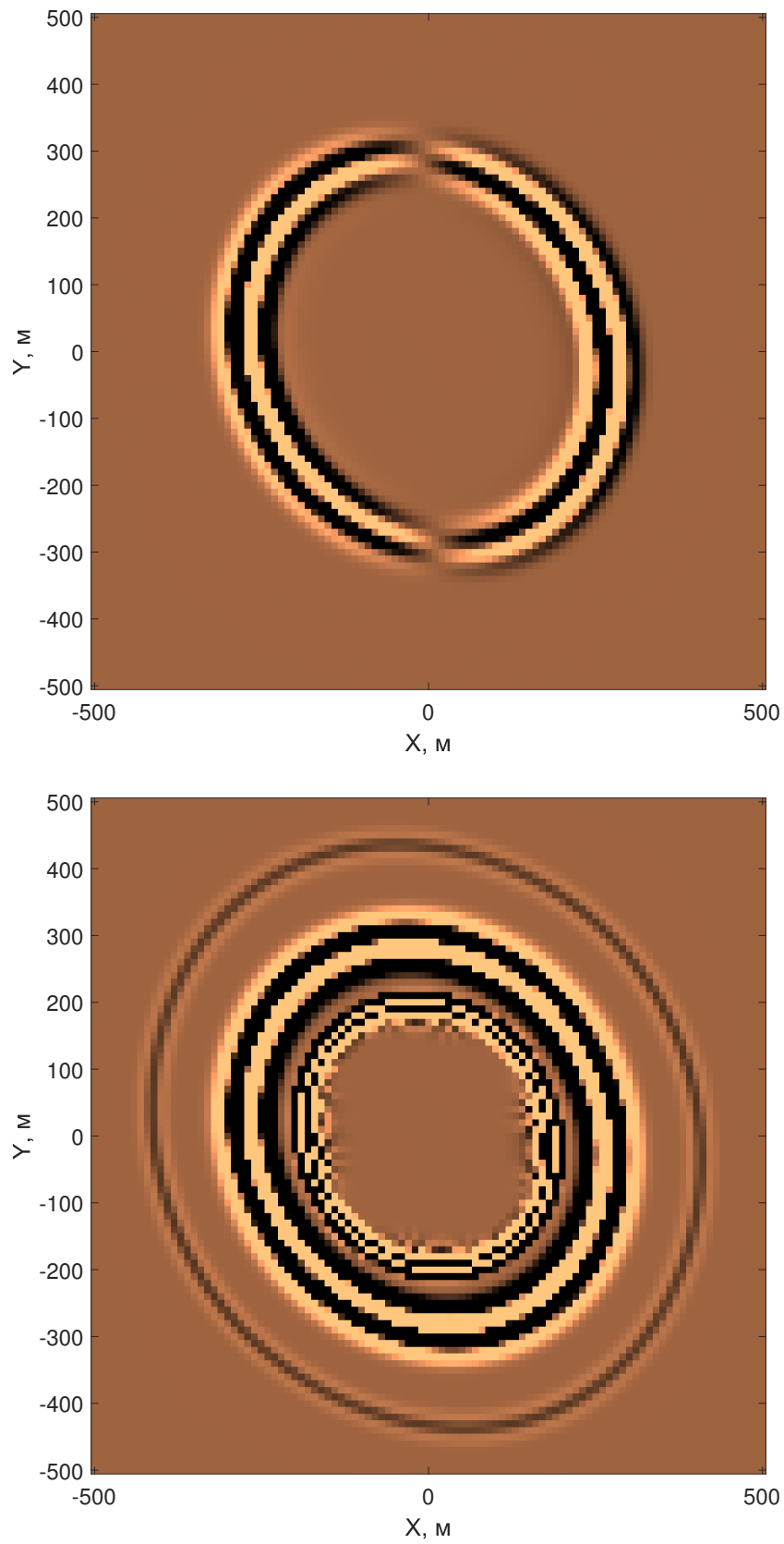


Рисунок 3.34 — Мгновенные снимки X-компоненты (вверху) и Z-компоненты (внизу) вектора скорости смещения на поверхности $Z = 0$ м для времени $t = 0.2$ с

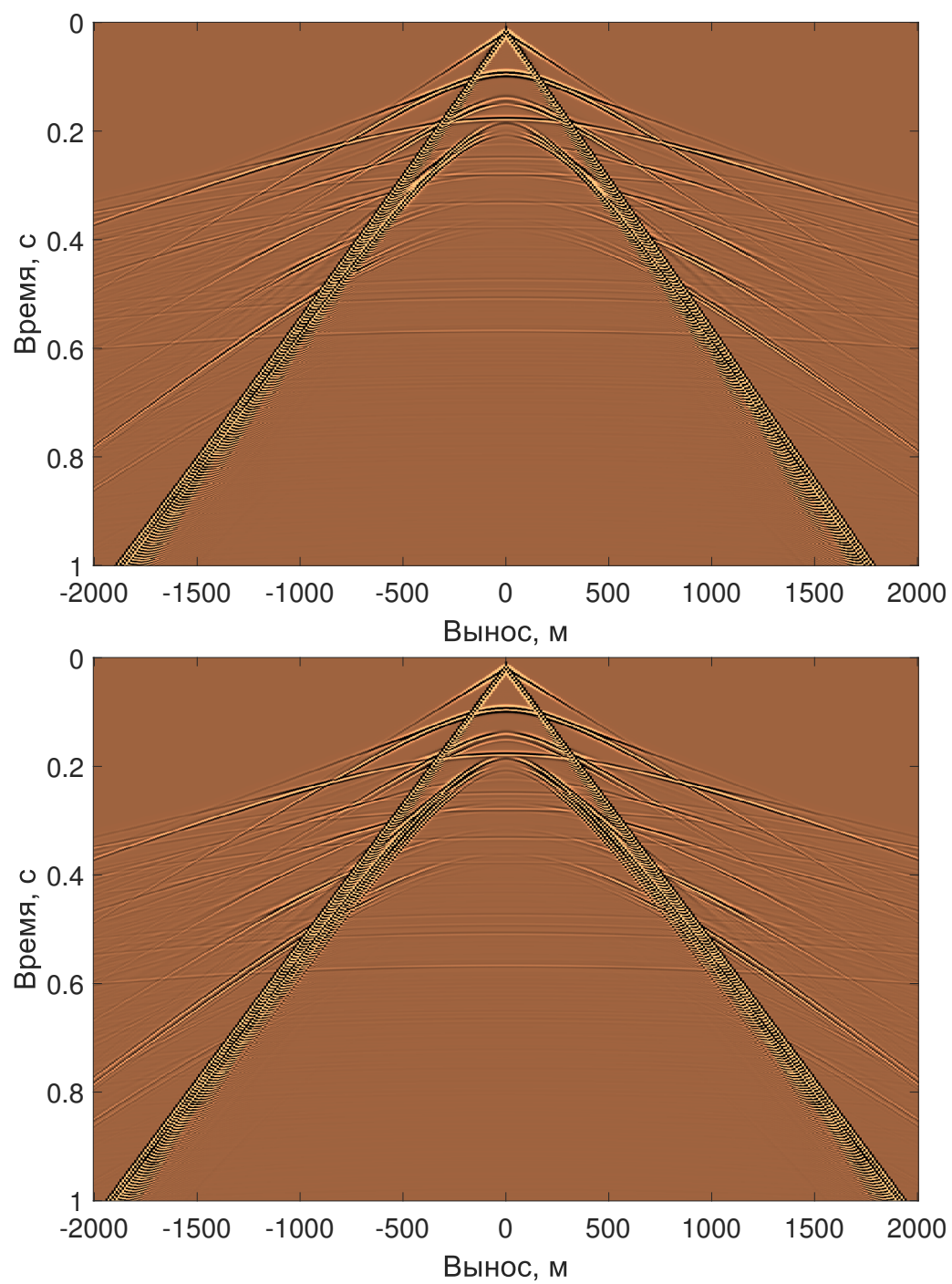


Рисунок 3.35 — Z-компонента вектора скорости смещений на «синтетической» сейсмограмме для линии приемников $Y = 0$ м (вверху) и линии приемников $X = 0$ м (внизу)

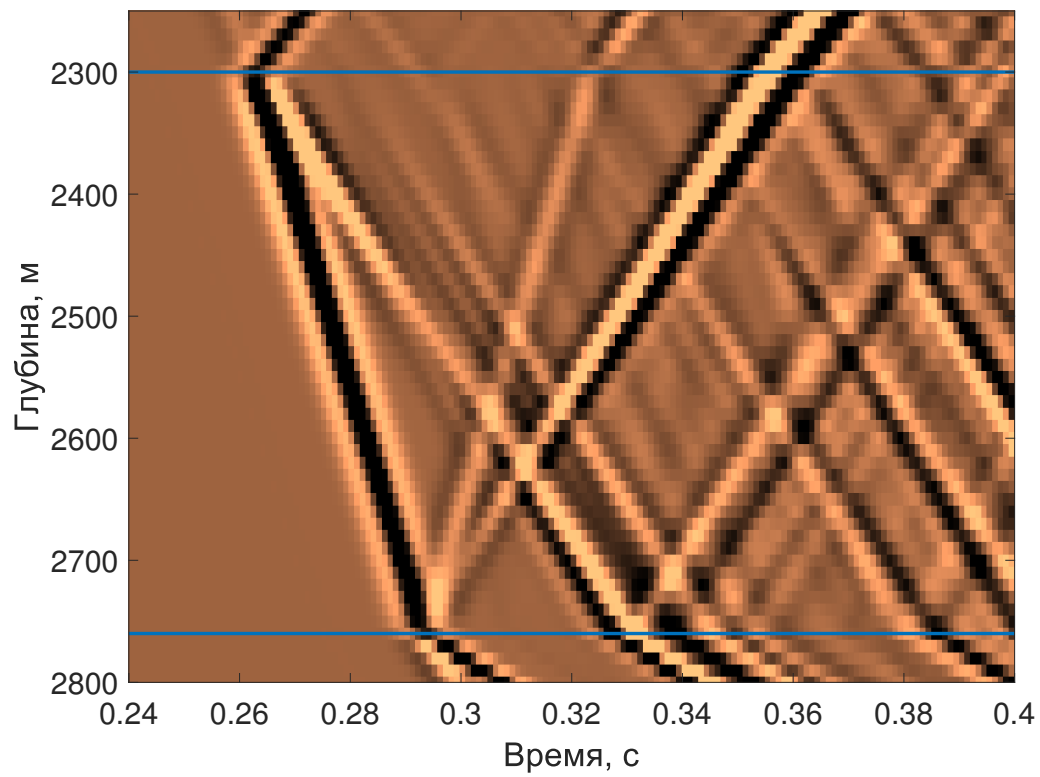
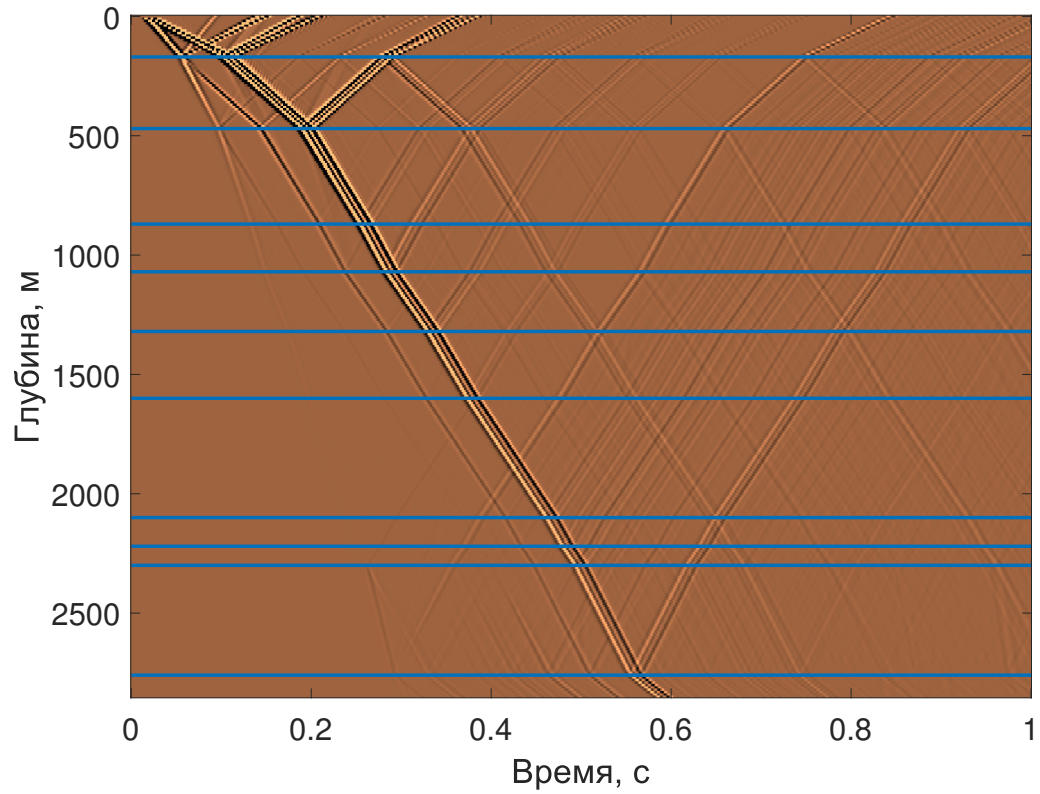


Рисунок 3.36 — X-компонента вектора скорости смещения на «синтетической» сейсмограмме ВСП для расположенной в начале координат скважины (вверху) и на ограниченной временами от 0.24 до 0.4 с и глубинами 2250 до 2800 м части сейсмограммы (внизу, с усилением амплитуды), синие линии — границы анизотропных слоев

Горшкалевым, В.В. Карстеном, Е.В. Афониной и Е.Е. Хогоевой [Горшкалев, Вишневский и др., 2016b]. С помощью поляризационного анализа обменных волн методом псевдовращений [Горшкалев и др., 2007] определяются параметры расщепления квазипродольных волн в верхнем анизотропном слое и его параметры анизотропии. Это позволяет скомпенсировать расщепление в верхнем слое и определить параметры расщепления для нижнего анизотропного слоя. Таким образом появляется возможность определения преимущественного направления ориентации трещин при обработке площадных многоволновых данных нефтегазоносных объектов [Горшкалев, Вишневский и др., 2016b].

3.4 Полномасштабное численное моделирование волновых полей в существенно трехмерных средах

Как отмечалось ранее, построение научно обоснованной трехмерной анизотропной модели геологической среды — трудоемкая задача. И даже более важный фактор, расчет волновых полей для трехмерных анизотропных моделей требует значительных вычислительных ресурсов: нужно моделировать полномасштабную поверхностную систему наблюдений, насчитывающую тысячи независимых источников сейсмических волн. При этом конечно-разностное моделирование для той же модели, не учитывающее анизотропию, т.е. для изотропной среды, требует вычислительных ресурсов приблизительно в пять раз меньше [Lisitsa, Vishnevsky, 2010] и по оперативной памяти, и по времени счета. Одновременно и создание трехмерной модели упругой среды без учета анизотропии — более простая задача.

Поэтому, хотя разработанный по схеме Лебедева алгоритм пока не использовался для полномасштабного численного моделирования в трехмерной анизотропной среде, соискателем программно реализован конечно-разностный алгоритм для изотропной упругой среды, использующий вариант схемы на сдвинутых сетках с повышенным до четвертого порядком аппроксимации по пространству [Virieux, 1986, Levander, 1988]. Это научно-исследовательское программное обеспечение применяется для расчета волновых полей уже в настоящее время, причем в существенно трехмерной среде для площадной системы наблюдения.

3.4.1 Расчет волновых полей для доюрского комплекса Томской области

Палеозойские отложения Западной Сибири давно привлекают внимание нефтяников, но известные методики выделения ловушек и построения моделей залежей требуют развития [Конторович и др., 2017]. Так, сегодня нет однозначного ответа на вопрос об эффективности сейсморазведки для прогноза и оценки перспектив нефтегазоносности доюрского интервала разреза. Для прояснения этого вопроса выполняется полноволновое численное моделирование сейсмических полей для моделей потенциально перспективных объектов доюрского комплекса Томской области, подтвержденных поисково-разведочным бурением [Вороничева, Вишневецкий и др., 2019; Lisitsa, Vishnevsky et al., 2020].

Упругая модель трехмерной изотропной среды строится специалистами ООО «ПетроТрейс» А.А. Шевченко, И.В. Романченко, ООО «Газпромнефть-НТЦ» Д.А. Литвиченко, Ю.В. Павловским и др. по данным бурения в Томской области и геологической интерпретации данных предыдущих лет. По результатам анализа этих данных выделяются четыре характерные варианта строения среды и распределения скоростей упругих волн в доюрском комплексе в регионе — четыре модели двумерной изотропной среды. Модель 1 (Рисунок 3.37,верху) представляет собой эффузивно-осадочный комплекс с эффузивными покровами. Прототипом модели 2 (Рисунок 3.37,внизу) являются органогенные постройки. В строение модели 3 (Рисунок 3.38,верху) включены отложения коры выветривания, закарстованные трещиноватые известняки, карстовые бокситы. Кислые интрузивы составляют основу для модели 4 (Рисунок 3.38,внизу). Далее эти модели объединяются в одну трехмерную модель упругой изотропной среды. Полные размеры модели 20 на 10 км и 7 км по глубине.

Лежащая до глубин 2850 м часть разреза — горизонтально-слоистая со скоростями от 1700 до 4200 м/с. Нижележащая часть разреза — тонкослоистая с чередованием высоко- и низкоскоростных зон от 3000 до 6500 м/с с высокой степенью дислокации слоев. Самые сложные участки модели — крутопадающие интрузивные образования и карбонатные структуры с углами падения до 85°, и выходом на поверхность размыва.

Расчет волновых полей выполняется с использованием разработанного на

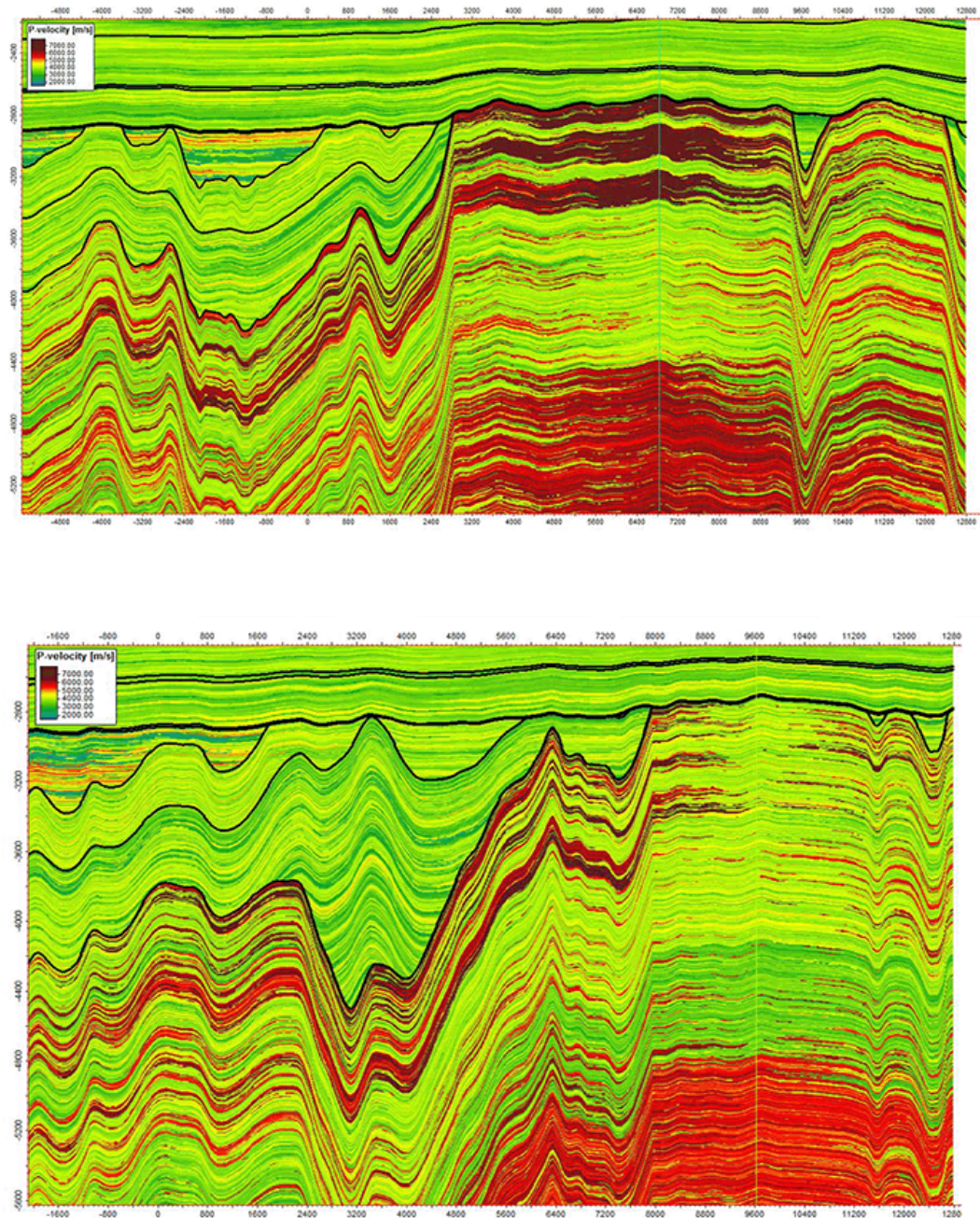


Рисунок 3.37 — Соответствующие первому (вверху) характерному варианту строения доюрского комплекса в Томской области и второму (внизу) сечения трехмерной упругой модели по данным бурения и геологической интерпретации данных предыдущих лет

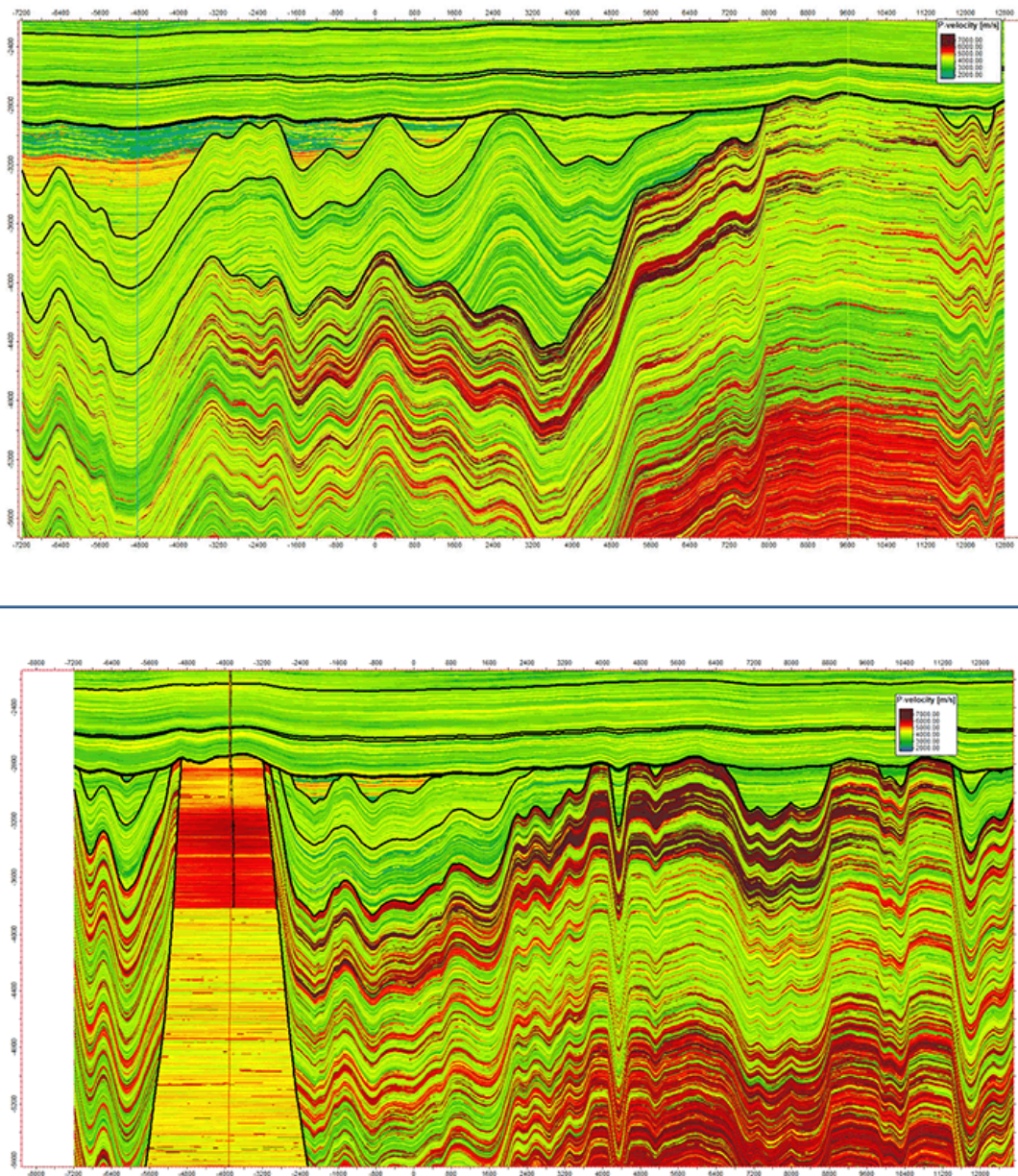


Рисунок 3.38 — Соответствующие третьему (вверху) характерному варианту строения доюрского комплекса Томской области и четвертому (внизу) сечения трехмерной упругой модели по данным бурения и геологической интерпретации данных предыдущих лет

основе конечно-разностной схемы Лебедева алгоритма [Lisitsa, Vishnevskiy, 2010] и слабоотражающих слоев М-РМЛ на границах вычислительной области [Дмитриев, Лисица, 2011; Дмитриев, Лисица, 2012]. Шаги по пространству по трем координатным осям совпадают и составляют 5 м. Размеры вычислительной конечно-разностной сетки $N_x = 2121$, $N_y = 2121$, $N_z = 1385$ ячеек. Ширина слабоотражающего М-РМЛ-слоя — 25 точек.

Для возбуждения сейсмических волн используется источник типа центр давления с функцией импульс Рикера с центральной частотой 25 Гц. Количество линий возбуждения — 31, через 300 м, 200 источников на линию через 100 м, общим количеством 6200. Система наблюдений для каждого источника составляет 100 линий приемников с шагом 100 м по 401 приемнику на линию с шагом 25 м, что составляет прямоугольник 10 на 9.9 км с источником в центре. Дополнительно записываются сейсмограммы вертикального сейсмического профилирования (ВСП): 16 скважин с постоянным положением относительно модели с шагом приемников 25 м по глубине. Время сейсмических наблюдений — 3 секунды.

Для вычислений используются кластеры «Ломоносов-2» Научно-исследовательского вычислительного центра Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и «Торнадо» Санкт-Петербургского политехнического университета. Параметры запусков для расчета разных источников и аппаратная часть в результате различаются, вычислительная сложность составляет 700-1000 ядрочасов на расчет одного источника. Общее время расчетов — около полугода.

Высокое качество рассчитанных данных подтверждается специалистами ООО «ПетроТрейс» и ООО «Газпромнефть-НТЦ» [Вороничева, Вишневский и др., 2019; Lisitsa, Vishnevsky et al., 2020], которыми выполнен комплекс процедур контроля, включающий анализ частотного состава, построение временных разрезов и разрезов равных удалений, сопоставление масштабированных во время сечений модели с суммарными разрезами. Далее рассчитанные данные используются при анализе процедур временной и глубинной обработки на предмет возможности построения качественных изображений доюрского комплекса Томской области [Протасов, Вишневский и др., 2021].

Заключение

Результатами исследования являются новая конечно-разностная схема, разработанная с использованием сетки Лебедева, для моделирования распространения сейсмических волн в трехмерных анизотропных средах и алгоритм на ее основе. Схема теоретически и экспериментально обоснована, определены условие устойчивости и численная дисперсия схемы, найдено и использовано для подавления нефизичных решений первое дифференциальное приближение. Выполнено численное исследование скорости сходимости схемы, показывающее сходимость первого порядка для границ разрыва коэффициентов уравнений, не проходящих по линиям конечно-разностной сетки.

Созданный на основе разработанного алгоритма, использующего декомпозицию области для распараллеливания вычислений и прием построения слабоотражающих слоев M-PML для ограничения расчетной области, научно-исследовательский вариант параллельного программного обеспечения показал эффективность распараллеливания 0.9 при увеличении количества процессорных ядер в 10 раз. Рассчитанные с его помощью волновые поля успешно используются как соискателем для исследования скорости численной сходимости конечно-разностной схемы, так и другими специалистами в прикладных задачах сейсмической геофизики: при изучении амплитуд отражения для анизотропных сред с различными типами симметрии; для определения параметров анизотропии в верхнем анизотропном слое слоистой модели Юрубчено-Тахомской зоны и компенсации анизотропии верхнего слоя для более точного определения параметров анизотропии нижнего анизотропного слоя.

Преимуществами разработанных схемы и алгоритма являются:

- расчет полного волнового поля, которое вследствие сходимости схемы можно сколь угодно приблизить к решению дифференциальной задачи ценой уменьшения шага дискретизации;

— относительная простота программной реализации алгоритма, а так же его дальнейшего развития, например, введение в уравнения поглощения;

— в сравнении с прямым аналогом — конечно-разностной схемой на повернутых сетках для трехмерной анизотропной среды — разработанная схема требует приблизительно вдвое меньшей памяти компьютера для вычислений с заданным уровнем численной дисперсии.

К недостаткам разработанной схемы (как и других конечно-разностных) нужно отнести худшую аппроксимацию границ разрыва коэффициентов уравнений, которые не проходят по границам ячеек сетки, например, наклонные и криволинейные. Когда влияние таких границ на волновую картину велико, например, для моделей с топографией поверхности, рекомендуется использовать для моделирования другие численные методы, например, конечных элементов или Галеркина.

Соответственно, первым из возможных направлений развития разработанного алгоритма в будущем можно выделить создание на его основе гибридного алгоритма с методом конечных элементов или Галеркина. Например, для решения задач сейсмологии с топологией можно использовать для аппроксимации части модели со свободной поверхностью математические методы, обеспечивающие более высокий порядок ее аппроксимации. Одновременно с этим для численного моделирования волновых полей в части модели без выделенных контрастных границ использовать более вычислительно эффективную схему Лебедева. А на границе между первой и второй частями модели разработать математически корректные условия согласования. Это позволит значительно увеличить точность численного решения при разумном увеличении вычислительной сложности алгоритма.

К существенным особенностям разработанного алгоритма следует отнести его значительную вычислительную стоимость, что приводит к фактической необходимости ориентации на параллельные суперкомпьютеры при разработке научно-исследовательской версии программного обеспечения и последующем его использовании для расчета волновых полей.

Соответственно, второе направление развития — повышение вычислительной эффективности алгоритма. Во-первых, перспективным видится создание гибридного алгоритма, совмещающего конечно-разностную схему Лебедева и схему на сдвинутых сетках. Для моделей с локальными анизотропными включениями

возможно использование схемы Лебедева только для части вычислительной области, содержащей анизотропные включения, и значительно более вычислительно дешевой схемы на сдвинутых сетках — для изотропной части вычислительной области. Равенство скоростей конечно-разностных плоских волн этих двух схем позволяет надеяться, что паразитные отражения, возникающие на границах их сопряжения, удастся сделать минимальными.

Во-вторых, для повышения вычислительной эффективности конечно-разностных схем применяется повышение порядка их аппроксимации по пространству [Levander, 1988]. Этот подход напрямую применим к разработанной схеме, а теоретическое исследование и практическое применение возникающих в результате конечно-разностных схем также ждет воплощения в будущем.

Третье направление развития — доработка и дальнейшее применение основанного на разработанном алгоритме научно-исследовательского программного обеспечения. К настоящему времени численное моделирование волновых полей с помощью разработанного программного обеспечения выполнялось для плоскостных моделей [Горшкалев, Вишневский и др., 2016а; Горшкалев, Вишневский и др., 2016b; Литтау, Вишневский и др., 2017] и для существенно трехмерных изотропных моделей [Протасов, Вишневский и др., 2021]. Расчет волновых полей для существенно трехмерных моделей анизотропных упругих сред — вопрос будущего.

Литература

1. Аки К. Количественная сейсмология: Теория и методы. Пер. с англ. / К. Аки, П. Ричардс. — М. : МИР, 1983. — 360 с.
2. Алексеев А.С. Численное моделирование распространения сейсмических волн в радиально-неоднородной модели Земли / А.С. Алексеев, Б.Г. Михайленко // Доклады Академии наук. — 1977. — Т. 235, № 1. — С. 46–49.
3. Вавакин А.С. Об эффективных характеристиках неоднородных сред с изолированными неоднородностями / А.С. Вавакин, Р.Л. Салганик // Известия АН СССР, Механика твердого тела. — 1975. — № 3. — С. 65–75.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. — М. : Наука, 1981. — 512 с.
5. Вишневский Д.М. Свидетельство о регистрации программы ЭВМ ElastAnis_LScheme / Д.М. Вишневский, В.В. Лисица // Св-во о регистр. прогр. 2021617444; RU; №2021615813, заявл. 22.04.2021, опубл. 14.05.2021.
6. Вишневский Д.М. Свидетельство о регистрации программы ЭВМ ElastAnis_RScheme / Д.М. Вишневский, В.В. Лисица // Св-во о регистр. прогр. 2021665499; RU; №2021664741, заявл. 23.09.2021, опубл. 27.09.2021.
7. Реализация полноволнового моделирования 3Д для изучения доюрского комплекса Томской области / Е.М. Вороновичева, Д.М. Вишневский [и др.] // Геомодель-2019: 21-я конференция по вопросам геологоразведки и разработки месторождений нефти и газа (г. Геленджик, 9-13 сентября 2019 г.): Тезисы докладов. — Геленджик. — 2019. — С. 1–6.
8. Глинский Б.М. Технология суперкомпьютерного 3D моделирования сейсмических волновых полей в сложно построенных средах / Б.М. Глинский,

- В.Н. Мартынов, А.Ф. Сапетина // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. — 2015. — Т. 4, № 4. — С. 101–116.
9. Глинский Б.М. 3D-моделирование сейсмических волновых полей в средах, характерных для вулканических структур / Б.М. Глинский, В.Н. Мартынов, А.Ф. Сапетина // Математические заметки СВФУ. — 2015. — Т. 22, № 3. — С. 84–98.
 10. Годунов С.К. Разностные схемы / С.К. Годунов, В.С. Рябенский. — М. : Наука, 1973. — С. 440.
 11. Годунов С.К. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения / С.К. Годунов, Е.И. Роменский. — Новосибирск : Изд-во СО РАН, 1998. — С. 400.
 12. Гольдин С.В. Сейсмические волны в анизотропных средах / С.В. Гольдин. — Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2008. — 372 с.
 13. Влияние масштаба микротомографических изображений на оценку макромасштабных свойств породы / Я. В. Базайкин, Т. С. Хачкова [и др.] // Технологии сейсморазведки. — 2016. — № 2. — С. 38–47.
 14. Тестирование процесса поляризационной обработки обменных PS-волн для оценки анизотропии трещиноватых коллекторов Юрубчено-Тохомской зоны (по данным математического моделирования) / С.Б. Горшкалев [и др.] // Геология и геофизика. — 2004. — Т. 45, № 6. — С. 760–773.
 15. Поляризационный анализ отраженных PS-волн в средах с переменным направлением трещиноватости / С.Б. Горшкалев, Д.М. Вишневский [и др.] // Технологии сейсморазведки. — 2016 а. — № 1. — С. 52–60.
 16. Анализ возможности изучения переменного направления трещиноватости коллектора по данным ВСП / С.Б. Горшкалев, Д.М. Вишневский [и др.] // Технологии сейсморазведки. — 2016 б. — № 1. — С. 44–51.

17. Дмитриев М.Н. Применимость слабоотражающих граничных условий М-РМЛ при моделировании волновых процессов в анизотропных средах. Часть I: Уровень отражений / М.Н. Дмитриев, В.В. Лисица // Сиб. журн. вычисл. математики. — 2011. — Т. 14, № 4. — С. 333–344.
18. Дмитриев М.Н. Применимость слабоотражающих граничных условий М-РМЛ при моделировании волновых процессов в анизотропных средах. Часть II: Устойчивость / М.Н. Дмитриев, В.В. Лисица // Сиб. журн. вычисл. математики. — 2012. — Т. 15, № 1. — С. 45–55.
19. Кашубин С.Н. Сейсмическая анизотропия и эксперименты по ее изучению на Урале и Восточно-Европейской платформе / С.Н. Кашубин. — Екатеринбург : УрО РАН, 2001. — 181 с.
20. Квасов И.Е. Численное моделирование сейсмических откликов в многослойных геологических средах сеточно-характеристическим методом / И.Е. Квасов, С.А. Панкратов, И.Б. Петров // Математическое моделирование. — 2010. — Т. 22, № 9. — С. 13–22.
21. Коновалов А.Н. Динамическая задача теории упругости в постановке «скорости-напряжения» / А.Н. Коновалов // Дифференц. уравнения. — 1999. — Т. 35, № 2. — С. 238–248.
22. Геологическое строение и условия формирования гигантской Юрубчено-Тохомской зоны нефтегазонакопления в верхнем протерозое Сибирской платформы / А.Э. Конторович [и др.] // Геология и геофизика. — 1996. — Т. 37, № 8. — С. 166–195.
23. Сейсмогеологические модели палеозойских комплексов и нефтегазоперспективных объектов юго-востока Западной Сибири (Новосибирская область) / В.А. Конторович [и др.] // Технологии сейсморазведки. — 2017. — № 3. — С. 85–95.
24. Конечно-разностный метод численного моделирования распространения сейсмических волн в трехмерно-неоднородных разномасштабных средах / В.И. Костин [и др.] // Вычислительные методы и программирование. — 2011. — Т. 12. — С. 321–329. —

25. Костров Б.В. Влияние предварительного напряженного состояния на распространение плоских сейсмических волн / Б.В. Костров, Л.В. Никитин // Физика Земли. — 1968. — № 9. — С. 30–38.
26. Крауклис П.В. Волновое поле точечного источника в скважине / П.В. Крауклис, Л.А. Крауклис // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. — 1976. — Т. XVI. — С. 41–53.
27. Кузнецов В.М. Введение в сейсмическую анизотропию: теория и практика / В.М. Кузнецов, А.П. Жуков, М.Б. Шнеерсон. — М. : ГЕРС, 2006. — 160 с.
28. Ландау Л.Д. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М. : Наука, 1987. — 246 с.
29. Лебедев В.И. Разностные аналоги ортогональных разложений, основных дифференциальных операторов для некоторых краевых задач математической физики. / В.И. Лебедев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1964. — Т. 4, № 3. — С. 449–465.
30. Левянт В.Б. Численное моделирование волнового отклика от субвертикальных макротрещин, вероятных флюидопроводящих каналов / В.Б. Левянт, И.Б. Петров, И.Е. Квасов // Технологии сейсморазведки. — 2011. — № 4. — С. 41–61.
31. Левянт В.Б. Численное моделирование волновых откликов от системы (кластера) субвертикальных макротрещин / В.Б. Левянт, И.Б. Петров, М.В. Муратов // Технологии сейсморазведки. — 2012. — № 1. — С. 5–21.
32. Лисица В.В. Об особенностях схемы Лебедева при моделировании упругих волн в анизотропных средах / В.В. Лисица, Д.М. Вишневский // Сиб. журн. вычисл. математики. — 2011. — Т. 14, № 2. — С. 155–167.
33. Лисица В.В. Комбинирование разрывного метода Галеркина и метода конечных разностей для учета сложного строения верхней части разреза при численном моделировании сейсмических полей / В.В. Лисица, В.А. Чеверда // Технологии сейсморазведки. — 2014. — № 4. — С. 60–67.

34. Особенности амплитуд отражения в лучевом приближении для анизотропных сред с различными типами симметрии [Электронный ресурс] / О.А. Литтау, Д.М. Вишневский [и др.] // Тюмень 2017: Геонауки - ключ к рациональному освоению недр: Материалы 5-ой научно-практической конференции (г. Тюмень, 27-30 марта 2017 г.). — Тюмень. — 2017. — IN07. — 7 с.
35. Лысь Е.В. Численное моделирование сейсмоакустических волновых полей для анизотропного околоскважинного пространства / Е.В. Лысь, В.В. Лисица // Технологии сейсморазведки. — 2008. — № 1. — С. 25–34.
36. Михайленко Б.М. Поглощающие граничные условия для уравнений теории упругости / Б.М. Михайленко, О.Н. Соболева // Сибирский журнал вычислительной математики. — 1998. — Т. 1, № 3. — С. 261–269.
37. Численное исследование возможностей построения изображений доюрского комплекса Томской и Новосибирской областей / М.И. Протасов [и др.] // РРОнефть. Профессионально о нефти. — 2021. — Т. 6, № 4. — С. 71–80.
38. Садовский В.М. Вычислительный алгоритм для расчета вязкоупругих волн в среде Кельвина-Фойхта / В.М. Садовский, О.В. Садовская // Вычислительные методы и программирование. — 2014. — Т. 15, № 1. — С. 98–108.
39. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. — М. : Наука, 1983. — 616 с.
40. Шокин Ю.И. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике / Ю.И. Шокин, Н.Н. Яненко. — Новосибирск : Наука, 1985. — 368 с.
41. Alford R. M. Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation / R.M. Alford, K.R. Kelly, D.M. Boore // Geophysics. — 1974. — Vol. 39, no. 6. — P. 834–842.
42. Alekseev A.S. Solution of dynamic problems of elastic wave propagation in inhomogeneous media by a combination of partial separation of variables and finite difference methods / A.S. Alekseev, B.G. Mikhailenko // Geophysics. — 1980. — Vol. 48. — P. 161–172.

43. Backus G.E. Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering / G.E. Backus // Journal of Geophysical Research. — 1962. — Vol. 67, no. 11. — P. 4427–4440.
44. Becache E. A new family of mixed finite elements for the linear elastodynamic / E. Becache, P. Joly, C. Tsogka // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 2002. — Vol. 39. — P. 2109–2132.
45. Becache E. High-order Absorbing Boundary Conditions for anisotropic and convective wave equations / E. Becache, D. Givoli, T. Hagstrom // Journal of Computational Physics. — 2010. — Vol. 229, no. 4. — P. 1099–1129. —
46. Becache E. Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves / E. Becache, S. Fauqueux, P. Joly // J. Comput. Phys. — 2003. — Vol. 188, no. 2. — P. 399–433.
47. Berenger J.-P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves / J.-P. Berenger // J. Comput. Phys. — 1994. — Vol. 114. — P. 185–200.
48. Biot M.A. Propagation of elastic waves in a cylindrical bore containing a fluid / M.A. Biot // Journal of Applied Physics. — 1952. — Vol. 9, no. 23. — P. 997–1005.
49. Calhoun D.A. Logically Rectangular Grids and Finite Volume Methods for PDEs in Circular and Spherical Domains / D.A. Calhoun, C. Helzel, R.J. LeVeque // SIAM Review. — 2008. — Vol. 50, no. 4. — P. 723–752.
50. Cerveny, V. Seismic Rays and Ray Intensities in Inhomogeneous Anisotropic Media / V. Cerveny // Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. — 1972. — Vol. 29, no. 1. — P. 1–13.
51. Cerveny, V. Ray Method in Seismology / V. Cerveny, I. Molotkov, I. Psencik. — Praha : Univerzita Karlova, 1977. — 214–p.
52. Chew W.C. Perfectly matched layers for elastodynamics: a new absorbing boundary condition / W.C. Chew, Q.H. Liu // Journal of Computational Acoustics. — 1996. — no. 4. — P. 341–359.

53. High-order absorbing boundary conditions for wave propagation models. Straight line boundary and corner cases / F. Collino [et al.] // In Proceedings of the 2nd International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (Newark, DE, 1993). — Philadelphia, PA, USA. — 1993. — P. 161–171.
54. Collino F. Optimizing the perfectly matched layer / F. Collino, P. Monk // Comput. Methods .Appl. Mech. Eng. — 1998. — Vol. 164. — P. 157–171.
55. Collino F. Application of the perfectly matched layer absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media / F. Collino, C. Tsogka // Geophysics. — 2001. — Vol. 66. — P. 294–307.
56. Davydycheva S. An efficient finite-difference scheme for electromagnetic logging in 3D anisotropic inhomogeneous media / S. Davydycheva, V. Druskin, T. Habashy // Geophysics. — 2003. — Vol. 68, no. 5. — P. 1525–1535.
57. Dumbser M. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - II. The three-dimensional isotropic case / M. Dumbser, M. Kaser // Geophysical Journal International. — 2006. — Vol. 167, no. 1. — P. 319–336.
58. Engquist B. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves / B. Engquist, A. Majda // Math. Comp. — 1977. — Vol. 31. — P. 629–651.
59. An hp-adaptive discontinuous Galerkin finite-element method for 3-D elastic wave modelling / V. Etienne [et al.] // Geophysical Journal International. — 2010. — Vol. 183. — P. 941–962.
60. Galis M. A 3-D hybrid finite-difference-finite-element viscoelastic modelling of seismic wave motion / M. Galis, P. Moczo, J. Kristek // Geophysical Journal International. — 2008. — Vol. 175. — P. 153–184.
61. Evidence for rapid variations of azimuthal anisotropy in the near surface: An example from Eastern Siberia, Russia / S. Gorshkalev [et al.] // Journal of Seismic Exploration. — 2007. — Vol. 16, no. 2-4. — P. 319–330.

62. Graves R.W. Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite difference / R.W. Graves // Bulletin of the Seismological Society of America. — 1996. — Vol. 86. — P. 1091–1106.
63. Higdon R. Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation / R. Higdon // Math. Comp. — 1987. — Vol. 49. — P. 65–90.
64. Hu F.Q. An Analysis of the Discontinuous Galerkin Method for Wave Propagation Problems / F.Q. Hu, M.Y. Hussaini, P. Rasetarinera // Journal of Computational Physics. — 1999. — Vol. 151, no. 2. — P. 921–946.
65. Hudson J. Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks / J. Hudson // Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. — 1981. — Vol. 64. — P. 133–150.
66. Hudson J. Effective-medium theories for fluid-saturated materials with aligned cracks / J. Hudson, T. Pointer, E. Liu // Geophysical Prospecting. — 2001. — Vol. 49, no. 5. — P. 509–522. —
67. Igel H. Anisotropic wave propagation through finite-difference grids / H. Igel, P. Mora, B. Riollot // Geophysics. — 1995. — Vol. 60. — P. 1203–1216.
68. Kaser M. An arbitrary high-order discontinuous galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - I. the two-dimensional isotropic case with external source terms / M. Kaser, M. Dumbser // Geophysical Journal International. — 2006. — Vol. 166, no. 2. — P. 855–877.
69. Synthetic seismograms: a finite-difference approach / K.R. Kelly [et al.] // Geophysics. — 1976. — Vol. 41, no. 1. — P. 2–27.
70. Komatitsch D. The spectral element method; an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures / D. Komatitsch, J.-P. Vilotte, // Bulletin of the Seismological Society of America. — 1998. — Vol. 88, no. 2. — P. 368–392.
71. Kosloff D. Forward modeling by a Fourier Method / D. Kosloff, E. Baysal // Geophysics. — 1982. — Vol. 47, no. 10. — P. 1402–1412.

72. Kosloff R. Absorbing boundaries for wave propagation problems / R. Kosloff, D. Kosloff // Journal of Computational Physics. — 1986. — Vol. 63, no. 2. — P. 363–376.
73. Modelling of Seismic waves propagation for 2D media (Direct and inverse problems) / V. Korneev, D. Vishnevsky [et al.] // Lecture Notes in Computer Sciences (Parallel Computing Technologies). — 1997. — Vol. 1277. — P. 350–357.
74. Numerical simulation of seismic wave propagation in models with complex intrusions: Anisotropy, attenuation, small-scale heterogeneities / V. Kostin, V., D. Vishnevsky [et al.] // SEG Annual Meeting (Houston, Texas, USA, September 2013). — Houston, Texas, USA. — 2013. — P. 3548–3552.
75. Levander A.R. Fourth-order finite-difference P-SV seismograms / A.R. Levander // Geophysics. — 1988. — Vol. 53, no. 11. — P. 1425–1436.
76. Lindman E. Free space boundary conditions for the time dependent wave equation / E. Lindman // J. Comput. Phys. — 1975. — Vol. 18. — P. 66–78.
77. Lisitsa V. On the interface error analysis for finite difference wave simulation / V. Lisitsa, O. Podgornova, V. Tcheverda // Computational Geosciences. — 2010. — Vol. 14, no. 4. — P. 769–778.
78. Lisitsa V. Lebedev scheme for the numerical simulation of wave propagation in 3D anisotropic elasticity / V. Lisitsa, D. Vishnevskiy // Geophysical Prospecting. — 2010. — Vol. 58, no. 4. — P. 619–635.
79. Lisitsa V. On specific features of the Lebedev scheme in simulating elastic wave propagation in anisotropic media / V. Lisitsa, D. Vishnevsky // Numerical Analysis and Applications. — 2011. — Vol. 4, no. 2. — P. 125–135.
80. Lisitsa V. Combination of the discontinuous Galerkin method with finite differences for simulation of seismic wave propagation / V. Lisitsa, V. Tcheverda, C. Botter // Journal of Computational Physics. — 2016. — Vol. 311. — P. 142–157.
81. Use of full-waveform modeling for detection of the prejurassic objects by seismic methods / V. Lisitsa, D. Vishnevsky [et al.] // Professional Geological Research

- and Exploration Scientific Seminar: Exploration as a Business - Oil and Gas International (5-8 November 2019). — Сочи. — 2019. — P. 1–5.
82. Use of seismic modelling to develop optimal processing procedures for investigation of pre-jurassic formations / V. Lisitsa, D. Vishnevsky [et al.] // EAGE. Saint Petersburg 2020. Geosciences: Converting Knowledge into Resources (Saint Petersburg, Russia, 6-9 April 2020).): Тезисы докладов. — СПб. — 2020. — P. 1–5.
 83. Meza-Fajardo K.C. A Nonconvolutional, Split-Field, Perfectly Matched Layer for Wave Propagation in Isotropic and Anisotropic Elastic Media: Stability Analysis / K.C. Meza-Fajardo, A.S. Papageorgiou // Bulletin of the Seismological Society of America. — 2008. — Vol. 98, no. 4. — P. 1811–1836.
 84. Hybrid modeling of P-SV seismic motion at inhomogeneous viscoelastic topographic structures / P. Moczo [et al.] // Bulletin of the Seismological Society of America. — 1997. — Vol. 87, no. 5. — P. 1305–1323.
 85. 3D Heterogeneous Staggered-Grid Finite-Difference Modeling of Seismic Motion with Volume Harmonic and Arithmetic Averaging of Elastic Moduli and Densities / P. Moczo [et al.] // Bulletin of the Seismological Society of America. — 2002. — Vol. 92, no. 8. — P. 3042–3066.
 86. Monk P. A Discontinuous Galerkin Method for Linear Symmetric Hyperbolic Systems in Inhomogeneous Media / P. Monk, G.R. Richter // Journal of Scientific Computing. — 2005. — Vol. 22-23, no. 1-3. — P. 443–477.
 87. Modeling elastic fields across irregular boundaries / F. Muir [et al.] // Geophysics. — 1992. — Vol. 57, no. 9. — P. 1189–1193.
 88. Petropoulos P. Reflectionless sponge layers as absorbing boundary conditions for the numerical solution of Maxwell's equations in rectangular, cylindrical and spherical coordinates / P. Petropoulos // SIAM J. Appl. Math. — 2000. — Vol. 60. — P. 1037–1058.
 89. Pissarenko D. 3D finite-difference synthetic acoustic logging in cylindrical coordinates / D. Pissarenko, G.V. Reshetova, V.A. Tcheverda // Geophysical Prospecting. — 2009. — Vol. 57. — P. 367–377.

90. Pissarenko D. 3D finite-difference synthetic acoustic log in cylindrical coordinates: parallel implementation / D. Pissarenko, G. Reshetova, V. Tcheverda // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2010. — Vol. 234, no. 6. — P. 1766–1772.
91. Podgornova O. Traveltime and Reflection Coefficients Accuracy of Staggered-grid Finite-difference Simulation of Seismic Waves / O. Podgornova, V. Lisitsa, D. Vishnevsky // Expanded Abstracts of 72-nd EAGE Annual Meeting. — 2010. — Vol. 71. — C042.
92. On the anisotropy of sedimentary rocks from shear-wave analysis / N. Puzyrev [et al.] // Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. — 1984. — Vol. 76. — P. 243–252.
93. Ruger A. Reflection coefficients and azimuthal AVO Analysis in anisotropic media / A. Ruger // Society of Exploration Geophysicists, 2002. — 202 p.
94. Saenger E.H. Modeling the propagation of the elastic waves using a modified finite-difference grid / E.H. Saenger, N. Gold, S.A. Shapiro // Wave Motion. — 2000. — Vol. 31. — P. 77–92.
95. Saenger E.H. Finite-difference modeling of viscoelastic and anisotropic wave propagation using the rotated staggered grid / E.H. Saenger, T. Bohlen // Geophysics. — 2004. — Vol. 69, no. 2. — P. 583–591.
96. Schoenberg M. A calculus for finely layered anisotropic media / M. Schoenberg, F. Muir // Geophysics. — 1989. — Vol. 54, no. 5. — P. 581–589.
97. Schoenberg M. Seismic anisotropy of fractured rock / M. Schoenberg, C.M. Sayers // Geophysics. — 1995. — Vol. 60, no. 1. — P. 204–211.
98. Thomsen L. Weak elastic anisotropy / L. Thomsen // Geophysics. — 1986. — Vol. 51, no. 10. — P. 1954–1966.
99. Tromp J. Spectral-element and adjoint methods in seismology / J. Tromp, D. Komatitsch, Q. Liu // Commun. Comput. Phys. — 2008. — Vol. 3, no. 1. — P. 1–32.

100. Numerical study of the interface errors of finite-difference simulations of seismic waves / D. Vishnevsky, D. [et al.] // *Geophysics*. — 2014. — Vol. 79, no. 4. — P. T219–T232.
101. Virieux J. SH-wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method / J. Virieux // *Geophysics*. — 1984. — Vol. 49, no. 11. — P. 1933–1942.
102. Virieux, J. P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method / J. Virieux // *Geophysics*. — 1986. — Vol. 51, no. 4. — P. 889–901.
103. Virieux J. A review of the spectral, pseudo-spectral, finite-difference and finite-element modelling techniques for geophysical imaging / J. Virieux, H. Calandra, R.E. Plessix // *Geophysical Prospecting*. — 2011. — Vol. 59, no. 5. — P. 794–813.
104. Winterstein D.F. Velocity anisotropy terminology for geophysicists / D.F. Winterstein // *Geophysics*. — 1990. — Vol. 55, no. 8. — P. 1070–1088.
105. Yee K. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media / K. Yee // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. — 1966. — Vol. 14. — P. 302–307.
106. Yomogida K. 3-D wave propagation in the Los Angeles basin for the Whittier-Narrows earthquake / K. Yomogida, J.T. Etgen // *Bulletin of the Seismological Society of America*. — 1993. — Vol. 83, no. 5. — P. 1325–1344.
107. Zhang J. Quadrangle-grid velocity-stress finite-difference method for elastic-wave-propagation simulation / J. Zhang // *Geophysical Journal International*. — 1997. — Vol. 131, no. 1. — P. 127–134.
108. Zhang J. Quadrangle-grid velocity-stress finite difference method for poroelastic wave equations / J. Zhang // *Geophysical Journal International*. — 1999. — Vol. 139, no. 1. — P. 171–182.
109. Zhang J. Elastic wave propagation in heterogeneous anisotropic media using the lumped finite-element method / J. Zhang, D.J. Verschuur // *Geophysics*. — 2002. — Vol. 67, no. 2. — P. 625–638.

110. Application of the multiaxial perfectly matched layer (M-PML) to near-surface seismic modeling with Rayleigh waves / C. Zeng, [et al.] // Geophysics. — 2011. — Vol. 76, no. 3. — P. 43–52.