ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ НЕФТЕГАЗОВОЙ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ
ИМ. А.А. ТРОФИМУКА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи



ГОНДЮЛ Елена Александровна

АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА И НЕЙРОННОЙ СЕТИ

1.6.9 - Геофизика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Лисица Вадим Викторович,
доктор физико-математических наук

НОВОСИБИРСК
2026

Оглавление

Введение **5**

Глава 1. Аналитический обзор известных современных решений **12**

Глава 2. Алгоритм моделирования сейсмических волновых полей с использованием разностной схемы на сдвинутых сетках и нейронной сети NDM-net **22**

2.1. Постановка задачи 22

2.1.1.Конечно-разностная аппроксимация системы уравнений динамической теории упругости 23

2.1.2. Использование нейронной сети NDM-net для подавления численных ошибок в сейсмограммах . 31

2.2. Предобработка сейсмограмм с использованием быстрого преобразования Фурье 35

2.3. Численные эксперименты 41

2.3.1. Известные метрики оценки качества результатов при использовании нейронной сети NDM-net . . . 41

2.3.2. Используемые для верификации алгоритма скоростные модели среды и их системы наблюдения 43

2.3.3. Верификация алгоритма при подавлении численной дисперсии в сейсмограммах 46
2.3.4. Верификация алгоритма с использованием нейронной сети NDM-net для подавления численной ошибки в сейсмограммах при возмущении скоростной модели среды 55
2.4. Применение алгоритма при сейсмическом мониторинге захоронения парниковых газов в породе-коллекторе 67
2.4.1. Постановка задачи 69
2.4.2. Численные эксперименты 77
2.5. Применение алгоритма при глубинной миграции 82

Глава 3. Стратегии формирования выборки сейсмограмм для обучения нейронной сети NDM-net 86
3.1. Постановка задачи 86
3.2. Используемые метрики при формировании выборки для обучения 87
3.3. Использование кластерного анализа и введённых метрик для формирования обучающей выборки данных . 89
3.4. Статистический анализ точности результатов применения нейронной сети NDM-net при использовании трёх введённых метрик 91
3.4.1. Верификация алгоритма с использованием линейной комбинации трёх введённых метрик для формирования обучающей выборки данных для нейронной сети NDM-net 96

Заключение **101**

Список литературы **103**

Введение

Объект исследования – конечно-разностные схемы, аппроксимирующие уравнения динамической теории упругости, и нейронные сети на предмет их комбинирования при разработке алгоритма моделирования сейсмических волновых полей.

Актуальность. С ростом объёмов сейсмических данных и повышением требований к их качеству особенно актуальной становится задача разработки новых алгоритмов, способных повысить эффективность моделирования без потери точности. С появлением вычислительных ресурсов стало возможным выполнять моделирование сейсмических волновых полей для большого количества правых частей, приближаясь к решению реалистичных задач сейсморазведки. Однако объём вычислений всё ещё остаётся большим и может занимать тысячи ядрочасов. Одним из способов увеличения эффективности моделирования является увеличение шага вычислительной сетки в случае использования сеточного метода. Однако сложность заключается в появлении численной дисперсии, которая искажает форму сейсмического сигнала, затрудняя интерпретацию данных. Известные способы подавления численной дисперсии, основанные на модификации конечно-разностных схем, имеют строгое условие устойчивости и большое количество операций на один узел расчётной сетки. Другие способы, такие как увеличение степеней свободы при аппроксимации пространственного оператора,

предобработка входного сигнала и постобработка выходного сигнала для подавления численной дисперсии, в сочетании требуют также большого количества вычислений. Другой тип ошибки при использовании вычислительных методов – грубая дискретизация и несовпадение вычислительной сетки с границами слоёв скоростной модели среды. Однако известные методы подавления такого типа ошибок либо имеют первый порядок точности, либо требуют значительных вычислительных ресурсов. В связи с развитием методов машинного обучения, в частности нейронных сетей, открываются новые возможности для более точного и эффективного подавления численных ошибок за счёт способности нейронных сетей обучаться сложным преобразованиям данных. Поэтому особую актуальность приобретают алгоритмы моделирования сейсмических волновых полей с использованием сеточного метода и нейронной сети.

Цель исследования – повышение вычислительной эффективности методов и алгоритмов численного моделирования волновых сейсмических полей за счёт комбинирования конечно-разностных схем на сдвинутых сетках и нейронной сети NDM-net (сокращение от Numerical dispersion mitigation neural network - нейронная сеть, подавляющая численную дисперсию).

Научная задача – с использованием сеточного метода и нейронной сети NDM-net разработать алгоритм моделирования сейсмических волновых полей и реализовать его в научно-исследовательской версии программного обеспечения.

Теория и методы исследования, программное обеспечение

Высокая степень достоверности полученных научных результатов определяется использованием современных достижений в методах и приёмах, разработанных в ряде смежных областей машинного обучения, вычислительной и прикладной математики и статистики, таких как:

– теория упругости, а именно динамическая линейная система уравнений в изотропной постановке в качестве математической модели распространения упругих сейсмических волн;

– конечно-разностный метод решения динамической задачи теории упругости для расчёта сейсмических волновых полей [Vishnevsky et al., 2014];

– свёрточная нейронная сеть NDM-net для подавления численной дисперсии, возникающей при численном моделировании распространения сейсмических волновых полей с использованием грубой расчётной сетки, и численных ошибок при возмущении скоростной модели среды;

– формирование обучающей выборки данных с использованием иерархического кластерного анализа;

– глобальный анализ чувствительности для введения линейной комбинации трёх метрик.

Для создания научно-исследовательской версии программной реализации разработанного алгоритма для параллельных вычислительных систем используется язык программирования C/C++, Python и библиотека глубокого обучения PyTorch. Верификация разработанного алгоритма выполнена сериями численных экспериментов и сопоставлением результатов, полученных с использованием конечно-разностной схемы на сдвинутых сетках

[Vishnevsky et al., 2014] и мелкой расчётной сетки. Программное обеспечение протестировано с использованием ПО, предоставленным Д.М.Вишневским, и трёх скоростных моделей: модели BP, модели Ванавара и модели Мармуси.

Защищаемый научный результат

На основе комбинирования метода конечных разностей и нейронной сети NDM-net разработан и реализован алгоритм расчета сейсмических волновых полей, который обеспечивает приемлемую точность решения при сокращении времени счета до 6 раз по сравнению с расчетами на мелкой сетке.

Личный вклад

Автором внесён основной вклад в разработку алгоритма моделирования сейсмических волновых полей в двумерной изотропной среде и его реализации в виде научно-исследовательской версии программного обеспечения. Выполнены численные эксперименты с использованием трёх скоростных моделей принципиально разных по структуре сред. Соискателем был выполнен статистический анализ, в результате которого сформирована оптимизированная обучающая выборка, которая учитывает геометрическое расстояние между источниками, разницы в значениях между сейсмограммами и расхождение скоростных моделей среды.

Научная новизна результатов исследований

1. Подавляются численные ошибки (численная дисперсия и ошибка при возмущении скоростной модели среды) при решении динамической задачи теории упругости впервые с использованием нейронной сети для ускорения расчётов при сохранении заданной точности.

2. Используется быстрое преобразование Фурье (БПФ) как предобработка сейсмограмм при обучении нейронной сети NDM-net для сокращения размерности задачи.

3. Сформированы обучающие выборки данных и оптимизированы их размеры с использованием иерархического кластерного анализа на основе трёх введённых метрик: геометрического расстояния между источниками, разницы в значениях между сейсмограммами и расхождения скоростных моделей среды.

4. Вводится функционал как линейная комбинация трёх введённых метрик, минимизация которого формирует уменьшенную по размерам и репрезентативную обучающую выборку при сохранении точности результатов применения нейронной сети NDM-net.

Практическая значимость. Использование разработанного алгоритма моделирования сейсмических волновых полей сокращает время счёта. Это даёт возможность решать такие задачи, как сейсмический мониторинг захоронения парниковых газов для выявления утечек из породы-коллектора, изучение распространения сейсмических волн в сложных средах, обращение полного волнового поля и пр.

Созданный алгоритм использован специалистами ООО "ПетроТрейс"для построения глубинной миграции до суммирования. При этом показано, что применение NDM-net существенно увеличивает качество сейсмических изображений и уменьшает погрешность оценки глубины сейсмических событий.

Апробация работы и публикации. Результаты исследования известны научной общественности. Работа поддерживалась Российским фондом фундаментальных исследований 2022-2024 гг.

№22-11-00004 «Повышение эффективности численного моделирования волновых полей комбинированием сеточных методов и машинного обучения», руководитель – Лисица В.В. Результаты исследования обсуждались на 15 международных и всероссийских конференциях, в их числе

- Международная ежегодная конференция Russian Supercomputing Days, Москва, 2023; Москва, 2024.
- Международная конференция Computational Science and Its Applications - ICCSA, Греция, 2023; Вьетнам, 2024; Турция, 2025; Португалия, 2026.
- Всероссийская ежегодная конференция ГеоЕвразия, Москва, 2023; Москва, 2024.

Из них 13 докладов сделано лично.

Материалы диссертации изложены в 22 научных работах. В рецензируемых журналах их списка ВАК и "Белого списка"опубликовано 6 статей, из них 2 входят в международную базу цитирования Web of Science, Scopus:

- Computers and Geosciences (У1), 2025.
- Soil Dynamics and Earthquake Engineering (У1), 2024.
- Вычислительные методы и программирование (У2), 2024, 2025.
- Геофизика (У3), 2024, 2026.

Также получено одно свидетельство о регистрации программного обеспечения для ЭВМ.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы из 108 наименований. Работа содержит 118 страниц основного текста, 34 рисунков, 6 таблиц.

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю д.ф.-м.н. В. В. Лисице за квалифицированную помощь при решении сложных задач разработки численного алгоритма, всестороннюю поддержку и постоянное внимание. Особую благодарность автор выражает своим коллегам из разных институтов д.ф.-м.н. В. А. Чеверде, к.ф.-м.н. К.Г. Гадыльшину, к.ф.-м.н. Д.М. Вишневскому за профессионализм и компетентность при совместном обсуждении математических задач. Автор благодарит к.ф.-м.н. С.А. Соловьева, к.ф.-м.н. М.А. Новикова, к.ф.-м.н. Д.И.Прохорова за содержательные, плодотворные обсуждения и помощь при написании и представлении работы. Автор искренне благодарит В.И. Самойлову за ценные методические рекомендации и всестороннюю поддержку при подготовке диссертации.

Глава 1
Аналитический обзор известных современных решений

Распространение сейсмических волн описывается системой уравнений динамической теории упругости [Годунов, Рябенький, 1973; Ландау, Лифшиц, 1987; Гольдин, 2008]. Скорость распространения плоских волн в линейной идеально упругой среде не зависит от частоты волны, хотя оно может зависеть от направления распространения в случае анизотропной среды. Численная дисперсия (зависимость скорости распространения волны от её частоты) возникает, как специальных вид численной ошибки, обусловленный использованием схем чётного порядка аппроксимации по пространству. Выделяются следующие способы подавления численной дисперсии.

Первый – повышение точности аппроксимации решаемой системы уравнений. Это может достигаться, например, уменьшением шага сетки, что согласно классической теории численных методов приводит к снижению численной ошибки, пропорционально порядку аппроксимации [Годунов, 1973; Самарский, 1977]. Если применяются методы конечных элементов [Becache et al., 2002; Zhang, Vershuur, 2002], спектральных элементов [Komatitsch, Tsuboi, Tromp, 2005; Tromp et al., 2008; Ампилов и др., 2024], разрывный метод Галёркина [Etienne et al., 2010; Chung et al., 2015], то

повышение точности можно добиться увеличивая число степеней свободы – порядок полиномов внутри конечного элемента. Однако вышеперечисленные способы необязательно приводят к сокращению вычислительной сложности: при увеличении порядка аппроксимации условие устойчивости становится более строгим, увеличивается длина шаблона для конечных разностей (размер локальных матриц массы и жесткости – для разрывного методы Галёркина), к тому же увеличивается количество операций и используемой памяти. Также, подавление численной дисперсии возможно обеспечить применением методов более высокого порядка аппроксимации – схем высокого порядка, сеточно-характеристического метода, псевдо-спектральных методов и пр. Однако недостатком таких решений является большое количество операций на узел расчётной сетки и строгое условие устойчивости. Все вышеперечисленные подходы подавления численной дисперсии являются строго математически обоснованными и позволяют получать контролируемый результат, но их применение всегда приводит к увеличению вычислительных затрат.

Второй – использование фильтров для предобработки или постобработки сейсмических данных [Mittet, 2019; Mulder, 2023]. Исследователи E.F. Koene, J.O. Robertsson [Koene, Pobertsson, 2017] получают выражение для ошибки, вносимой конечно-разностной аппроксимацией производной по времени. При подавлении временной дисперсии вычислительные затраты в сочетании со схемами подавления пространственной дисперсии всё ещё остаются высокими.

Третий – использование методов машинного обучения, кото-

рые нашли широкое применение в геофизических приложениях. Так, в работе Kaur [Kaur, 2019] представлен алгоритм подавления численной ошибки в сейсмических данных с использованием генеративно-состязательных нейронных сетей GANs (сокращение от «Generative Adversarial Networks») [Goodfellow et al.,2014]. Результаты применения обученной нейронной сети на тестовых данных на различных синтетических моделях (модель Marmousi, модель с градиентной скоростью) показывают, что предлагаемое решение позволяет в значительной степени подавить дисперсию и артефакты с меньшим количеством затрачиваемой памяти и времени. Однако одновременно с качественным уменьшением численной ошибки возникает потеря самих сейсмических данных.

В работе Zhang [Zhang, 2019] предлагается использовать нейронные сети CNN (сокращение от «Convolutional Neural Network» - свёрточные нейронные сети) для подавления разных уровней шумов. Сейсмическое изображение разделяется на части с примерно одинаковым уровнем шума и для каждой такой части используется своя нейронная сеть. Такое решение показывает, что совместно с эффективным подавлением случайного шума сейсмические события сохраняются. Но неизвестно, применим ли такой подход для подавления численной дисперсии, которая имеет пространственно-временную корреляцию и будет ли он эффективен при большом количестве правых частей, т.е. источников.

В работе S.Yu с соавторами [Yu at al., 2019] используется CNN для «интеллектуального» шумоподавления. Результаты применения показывают, что настроенная сеть может потенциально использоваться для подавления случайного шума с неизвестной диспер-

сией, линейного шума и кратных волн в расчётных и полевых сейсмических данных. Кроме того, в этой работе утверждается, что оптимизированная нейронная сеть может адаптивно обрабатывать новые наборы данных без изменения параметров сети. Также решаются такие задачи, как насколько глубока должна быть нейронная сеть, как влияет количество обучающих данных на качество нейронной сети, какое должно быть расстояние между тренировочным и тестовым наборами данных и др. Однако, по мнению самих авторов, процесс обучения на доступных данных SEG требует значительного количества времени (6 часов для входных данных размером 1501×333).

Глубокое обучение в настоящее время играет важную роль в геофизических исследованиях. Оно используется для обработки и интерпретации данных, чтобы повысить точность вычислений [Song, 2020; Li, 2020], выделить первые вступления и фазы P- и S- волн [Zhu, 2018; Saad, 2020], а также для интерполяции [Olivera, 2018; Mandelli, 2019; Kaur, 2019; Chang, 2020], инверсии сейсмических полей [Yang, 2019; Li, 2019; Ren,2021] при решении нетривиальных обратных задач. Так, в работе Fangshu Yang и Jianwei Ma [Yang, Ma, 2019] исследуется свёрточная глубокая нейронная сеть для построения скоростной модели из необработанных сейсмограмм, заменяя таким образом такие методы, как томография и полноволновая инверсия. В работе Mandelli с соавторами [Mandelli et al., 2019] восстанавливаются пропущенные трассы с помощью U-net архитектуры, таким образом выполняя интерполяцию сейсмических данных. Harpreet Kaur в своей работе [Kaur, 2019] для такого метода интерполяции использует

другую разновидность нейронной сети - CycleGan (сокращение от «Cycle Generative Adversarial Network» - циклическая генеративно-состязательная сеть) [Zhu et al., 2017] с добавлением дополнительной функции потерь для регуляризации модели. Работа Xiaolei Song [X.Song, 2020] посвящена повышению качества сейсмических изображений, а также увеличению отношения сигнал/шум SNR (сокращение от «Signal Noize Ratio» - отношение сигнал/шум), с использованием условной генеративно-состязательной сети CGAN (сокращение от «Conditional Generative Adversarial Network») В работе Omar M. Saad [Saad, 2020] предлагается использовать CapsNet (сокращение от «Capsule Network» - капсульная сеть) [S. Sabour, 2017] для автоматического обнаружения землетрясений. Такая архитектура позволяет обучаться с меньшим количеством данных в обучающей выборке, а также может легко обобщаться на тестовые данные с учётом простой архитектуры нейронной сети.

Ещё одним зарождающимся и перспективным направлением использования нейронных сетей в геофизических приложениях - это непосредственное моделирование сейсмических полей с помощью глубокого обучения. W. Zhu с соавторами [Zhu et al., 2017] применили нейронную сеть GAN для прогнозирования распространения сейсмических полей лишь по нескольким предыдущим по времени полям. Однако с увеличением шага по времени качество заметно снижается, а также отмечаются аномальные отражения от границ в сложных средах. В работах других специалистов [Zhu et al., 2017; Xiang et al., 2024] используется нейронная сеть CNN с механизмом внимания для решения волнового уравнения для акустической среды. При этом входными данными нейронной сети слу-

жат скоростная модель и система наблюдения, а выходными – сейсмограммы. Однако, как считают сами авторы, при многократном отражении сейсмических волн от поверхностей качество полученных нейронной сетью сейсмических данных заметно ниже, нежели при однократном отражении. К тому же, чтобы применять такой подход, необходимо иметь как минимум 100 000 сейсмограмм для обучающей выборки, что неизбежно приведёт к уменьшению эффективности сейсмического моделирования. При этом погрешность всё ещё велика, чтобы говорить про практическое использование такого подхода.

Несколько раньше, разрабатывается нейронная сеть NDM-net (сокращение от «Numerical Dispersion Mitigation Network» - нейронная сеть, подавляющая численную дисперсию) для уменьшения численной дисперсии и повышения эффективности моделирования сейсмических волновых полей [Gadylshin et al. , 2022]. Идея разработки заключается в моделировании всего набора волновых полей с использованием конечно-разностной схемы четвёртого порядка, но с грубой дискретизацией. После этого моделируются волновые поля с использованием менее грубой дискретизации лишь для нескольких положений источников. Так формируется обучающая выборка. Затем нейронная сеть обучается и применяется на все грубые данные для сопоставления решения с низкой точностью с более точным решением. Авторы доказывают, что применение NDM-net позволяет ускорить сейсмическое моделирование в 5 раз по сравнению с двумерным классическим моделированием и в 16 раз в случае трёхмерного моделирования. Далее идея развивается в статьях К. Гадыльшина, К. Гадыльшиной, Е. Гондюл [Gondyul et al.,

2023; Gadylshin et al., 2023].

Второй основной составляющей численной погрешности сейсмического моделирования является ошибка, связанная с несогласованностью вычислительной сетки с границами слоёв модели среды и дискретизацией скоростной модели среды. Если модель задана аналитически, т.е. все поверхности определены явно, то однородные методы на неструктурированных сетках, такие как конечные элементы, спектральные элементы [Tromp et al., 2008], разрывный метод Галеркина [Minisini et al., 2013] и конечные разности на криволинейных сетках (суммирование по частям и миметические конечные разности), могут точно решить задачу [Gao et al., 2019; O'Reilly, Petersson, 2020; Sethi et al., 2021; Belousov, Lisitsa, 2023]. Указанные постановки требуют, чтобы модель была однородной в пределах ячейки сетки (элемента), а линии сетки были выровнены по физическим границам. Напротив, конечные разности и конечные объемы позволяют использовать неоднородные схемы, в которых неоднородности модели учитываются неявно путем соответствующей модификации коэффициентов уравнения упругих волн. Построение таких схем широко обсуждается в работах ряда учёных [Symes, Vdovina, 2009; Lisitsa et al., 2010; Vishnevsky et al., 2014; Moczo et al., 2018; Kristek et al., 2019]. Однако, как было показано в работе Д.М. Вишневского с соавторами [Vishnevsky et al., 2014], при использовании гармонического усреднения неоднородные подходы имеют точность первого порядка в общем случае и второго порядка для некоторых конкретных геометрий.

Другая постановка – использование орторомбического представления неоднородных сред, предложенное Moczo с соавторами

[Moczo, Kristek, Galis, 2014], а затем развитое для упругих [Kristek et al., 2017], вязкоупругих [Kristek et al., 2019], и пороупругих [Moczo et al., 2018; Gregor et al., 2020; Gregor et al., 2021] сред. Такая постановка повышает точность моделирования поверхностных волн и эффективно отображает неоднородность среды. Также разрабатываются новые постановки, такие как ограничение полосы волнового числа [Moczo et al., 2022; Valovcan et al., 2023], при которых пространственные производные заменяются как в однородной среде, так и на границе раздела материалов с непрерывными пространственными свертками. Однако при такой постановке потребуются значительные вычислительные ресурсы, особенно при 3D-моделировании.

С применением нейронной сети NDM-net появляется возможность подавить оба типа численной ошибки (численную дисперсию и ошибку, связанную с грубой дискретизацией скоростной модели среды), сокращая при это время расчёта сейсмических волновых полей [Gondyul et al., 2025].

Важный этап в разработке алгоритма – формирование репрезентативного набора данных для обучения нейронной сети. Ведь скорость обучения сети прежде всего зависит от размера обучающей выборки, а её качество от репрезентативности [Arpit et al, 2017]. Если определённого вида данные не представлены в обучающем наборе, модель обучится неправильно. Так возникает задача оптимизации набора данных и увеличения обобщаемости нейронной сети на тестовые данные. Выделяются следующие пути формирования репрезентативной выборки.

Первый – использование системы наблюдения. Так, можно

сформировать равномерную, случайную или дрожащую выборку (от англ. - Jittered sample) [Hennenfent, Herrmann, 2008]. Изначально последний тип выборки предназначался для трасс, однако способ применяется и при формировании выборки для классификации спутниковых данных [Wang et al., 2019]. Такие приемы хороши в силу их простой реализации. Но репрезентативность получаемой выборки сомнительна, поскольку при этом не используются свойства самих данных.

Второй – оптимизация уже имеющегося набора данных, т.е. выделение основных данных для уменьшения размера обучающей выборки. При этом отбор более полезных данных в тренировочном наборе выполняется в процессе обучения. Wang с соавторами, например, отслеживают и анализируют распределение LEV (сокращение от «loss error value» - значение ошибки потерь) в процессе обучения сети и проверяют качество тренировочного набора данных [Wang et al., 2019]. Другой способ оптимизации обучающей выборки – использование метода GIO (сокращение от «Gradient Information Optimization» - градиентная оптимизация информации), который основан на минимизации расстояния Кульбака-Лейблера между целевым набором данных и обучающей выборкой с целью уменьшения данных и ресурсов [Everaert, Potts, 2023]. Ещё одним способом оптимизации тренировочного набора является CAE t-SNE (сокращение от «Convolutional autoencoder t-distributed stochastic neighbor embedding» — свёрточный автоэнкодер с t-распределенным стохастическим вложением соседей) [Park et al., 2021]. Авторы предлагают анализировать данные в пространстве пониженной размерности для уменьшения размера

набора данных. Однако эти техники позволяют лишь удалять из набора данные с повреждениями, а не формировать репрезентативную выборку. При невозможности выявить важные признаки и искажённые данные отбор данных для обучения нейронной сети также невозможен. Кроме того, на сегодня неизвестно, применим ли метод при сложности и изменчивости самих сейсмических данных.

Из аналитического обзора известных современных решений и разработок следует, что для повышения эффективности численного моделирования распространения сейсмических волн в среде, особенно в применении к сложным алгоритмам обработки сейсмических данных, необходимы новые алгоритмы – с использованием нейронных сетей. Также для ускорения получения результатов применения нейронной сети и увеличения их точности необходимо разработать методику формирования набора данных для обучающей выборки.

Глава 2
Алгоритм моделирования сейсмических волновых полей с использованием разностной схемы на сдвинутых сетках и нейронной сети NDM-net

2.1. Постановка задачи

Входные данные алгоритма – двумерная скоростная модель изотропной упругой среды и поверхностная система наблюдений для регистрации сейсмограмм. При использовании разностной схемы на сдвинутых сетках [Virieux, Calandra, Plessix, 2011; Вишневский, Лисица, Чеверда, 2012; Kostin, 2015] для решения системы уравнений динамической теории упругости и расчёта сейсмограмм, и нейронной сети NDM-net [Gadylshin et al., 2022; Gadylshin et al., 2024; Гондюл и др., 2024; Gondyul et al., 2025] для подавления численной ошибки, которая в совокупности представляет собой численную дисперсию и ошибку при возмущении скоростной модели среды, решение на грубой расчётной сетке с возмущённой скоростной моделью преобразуется в решение на мелкой расчётной сетке без возмущения скоростной модели. В результате такого преобразования полученные сейсмограммы с малой долей численной ошибки – выходные данные алгоритма.

2.1.1. Конечно-разностная аппроксимация системы уравнений динамической теории упругости

Разработка алгоритма моделирования сейсмических волновых полей с использованием сеточного метода и нейронной сети выполняется поэтапно. Сначала рассчитываются сейсмограммы в результате численного моделирования распространения сейсмических волн в скоростной модели двумерной изотропной упругой среды. Для этого численно решается система дифференциальных уравнений в частных производных – система уравнений динамической теории упругости в терминах скорости смещения и тензора напряжений, которая для двумерной декартовой системы координат имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} \rho\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \\ \rho\frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{g}_{xx} \\ \hat{g}_{zz} \\ \hat{g}_{xz} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\vec{u} = (u_x, u_z)^T$ — вектор скорости смещения, σ_{xx}, σ_{zz}, σ_{xz} — компоненты тензора напряжения, $\rho = \rho(x, z)$ — плотность среды, C — тензор жёсткости, $\hat{g}_{xx} = g_{xx}\delta(x - x_s)\delta(z - z_s)$, $\hat{g}_{zz} = g_{zz}\delta(x - x_s)\delta(z - z_s)$, $\hat{g}_{xz} = g_{xz}\delta(x - x_s)\delta(z - z_s)$ — компоненты тензора правых частей. При этом используется наиболее распространённый тип источника – точечный, описываемый функциями Кронекера $\delta(x - x_s)$ и $\delta(z - z_s)$, где (x_s, z_s) —координаты источника.

Для изотропной среды тензор жёсткости представляется в

матричном виде:

$$C = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где λ, μ —параметры Ламе.

Система уравнений (1) решается для каждого источника x_s в ограниченной области $D = [x_s - L_x, x_s + L_x] \times [0, Z]$, где L_x — максимальное смещение приёмников, Z —глубина скоростной модели для отрезка времени $t \in [0, T]$.

Для решения системы (1) решается начально-краевая задача с нулевыми начальными данными и условиями свободной поверхности на границе при $z = 0$, а также PML (сокращение от Perfectly Match Layers — идеально согласованные слои) на остальных границах для ограничения целевой области без искусственных отражений [Berenger, 2006].

После решения системы уравнений динамической теории упругости (1) моделируется поверхностная система наблюдений и регистрируются синтетические сейсмограммы – волновые поля зафиксированные в точках положения приёмников. Для типичной системы наблюдения координаты источника имеют следующие значения: $(x_s, z_s) = (x_s, 0)$, приёмники: $(x_r^j(x_s), z_r^j(z_s)) = (x_r^j(x_s), 0)$, где j —индекс приёмника. Следовательно, координаты приёмников зависят от координат источников. Далее выполняется замена переменных: $x_o^j = x_r^j - x_s$, и тогда координаты для всех источников смещаются на постоянный интервал $x_o \in [-L_o, L_o]$, где L_o — максимальное смещение, причём $L_o \leq L_x$, т.е. L_o — локальная часть

скоростной модели среды. Таким образом для каждого источника с положением x_s регистрируется сейсмограмма $\vec{u}(t, x_o, x_s)$, зависящая от времени, и координаты смещения. Так как рассматриваются однокомпонентные сейсмограммы, в которых регистрируется только вертикальная компонента вектора скорости, а также все источники и приёмники расположены на поверхности, знак вектора опускается. Здесь и далее такая сейсмограмма обозначается либо как $u(t, x_o, x_s^j)$, либо как $S_j(t, x_o)$, где j указывает на номер источника.

При численном решении начально-краевой задачи для системы уравнений (1) используется конечно-разностная схема на сдвинутых сетках [Viriuex, 1986; Levander, 1988]. Для её построения вводится расчётная сетка Ω с шагами h_x, h_z, а компоненты скорости смещения определяются в следующих узлах сетки: $(u_x)^n_{i+1/2,j}$ определяется в точках $x_{i+1/2} = h_x(i+1/2)$, $z_j = h_z j$, $t^n = \tau n$; $(u_z)^n_{i,j+1/2}$ — в точках $x_i = h_x i$, $z_{j+1/2} = h_z(j+1/2)$, $t^n = \tau n$; $(\sigma_{xx})^{n+1/2}_{i,j}$ и $(\sigma_{zz})^{n+1/2}_{i,j}$ — в точках $x_i = h_x i$, $z_j = h_z j$, $t^{n+1/2} = \tau n + 1/2$; и $(\sigma_{xz})^{+1/2}_{i+1/2,j+1/2}$ — в точках $x_{i+1/2} = h_x(i+1/2)$, $z_{j+1/2} = h_z(j+1/2)$, $t^{n+1/2} = \tau(n+1/2)$, где τ — шаг по времени , индексы i, j, и n — целые числа.

Для схемы второго порядка по времени и четвертого порядка точности по пространству производные аппроксимируются следующими конечно - разностными операторами:

$$D_t[f]^N_{I,J} = \frac{f^{N+1/2}_{I,J} - f^{N-1/2}_{I,J}}{\tau} \approx \frac{\partial f}{\partial t}, \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
D_x[f]^N_{I,J} &= \frac{9}{8}\frac{f^N_{I+1/2,J} - f^N_{I-1/2,J}}{h_x} - \frac{1}{24}\frac{f^N_{I+3/2,J} - f^N_{I-3/2,J}}{h_x} \approx \frac{\partial f}{\partial x}, \\
D_z[f]^N_{I,J} &= \frac{9}{8}\frac{f^N_{I,J+1/2} - f^N_{I,J-1/2}}{h_z} - \frac{1}{24}\frac{f^N_{I,J+3/2} - f^N_{I,J-3/2}}{h_z} \approx \frac{\partial f}{\partial z},
\end{aligned} \tag{4}
$$

где функция $f(t, x, z)$ достаточно гладкая. При этом индексы верхнего регистра принимают целые или полуцелые значения, тогда как индексы в нижнем регистре – только целые.

С использованием полученных выражений для всех операторов (3), (4) аппроксимирующая уравнение (1) конечно–разностная схема представляется в виде системы уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\rho D_t[u_x]^{n+1/2}_{i+1/2,j} = D_x[\sigma_{xx}]^{n+1/2}_{i+1/2,j} + D_z[\sigma_{xz}]^{n+1/2}_{i+1/2,j}, \\
&\rho D_t[u_z]^{n+1/2}_{i+1/2,j} = D_x[\sigma_{xx}]^{n+1/2}_{i+1/2,j} + D_z[\sigma_{zz}]^{n+1/2}_{i+1/2,j}, \\
&D_t[\sigma_{xx}]^n_{i,j} = (\lambda + 2\mu) D_x[u_x]^n_{i,j} + \lambda D_z[u_z]^n_{i,j} + (\hat{f}_{xx})^n_{i,j}, \\
&D_t[\sigma_{zz}]^n_{i,j} = \lambda D_x[u_x]^n_{i,j} + (\lambda + 2\mu) D_z[u_z]^n_{i,j} + (\hat{f}_{zz})^n_{i,j}, \\
&D_t[\sigma_{xz}]^n_{i+1/2,j+1/2} = \mu D_x[u_z]^n_{i+1/2,j+1/2} + \mu D_z[u_x]^n_{i+1/2,j+1/2} \\
&+(\hat{f}_{xz})^n_{i+1/2,j+1/2}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Фазовые и групповые скорости плоских волн решения прямой задачи сейсмики (1) не зависят от частоты, кроме того для изотропных сред не зависят от направления распространения. Однако при решении конечно-разностной задачи (5) возникает такая зависимость, которая проявляется в численной дисперсии.

Численная дисперсия конечно-разностной схемы на сдвинутых сетках

Согласно теории численных методов, для численного решения характерно наличие численных ошибок, связанных с численной дисперсией [Лисица, 2015], дискретизацией скоростной моде-

ли среды, машинной точностью и т.д. Качество численного решения можно приблизить к истинному уменьшением шага сетки. Однако при этом существенно увеличиваются затрачиваемая память и время расчёта. В результате дисперсионного анализа конечно-разностной схемы выводится зависимость фазовой скорости от частоты [Ainsworth, 2004; Lisitsa, Vishnevskiy, 2010; Lisitsa, 2016].

Так, для рассматриваемой схемы четвертого порядка по пространству и второго порядка по времени фазовая скорость численного решения представляет собой функцию:

$$\begin{aligned} c^{fd} &= \pm\tfrac{Nc}{\alpha\pi} arcsin\left(\alpha\sqrt{\hat{k}_1^2+\hat{k}_2^2}\right), \\ \hat{k}_1 &= \tfrac{9}{8}\sin\left(\tfrac{\pi\cos(\beta)}{N}\right) - \tfrac{1}{24}\sin\left(\tfrac{3\pi\cos(\beta)}{N}\right), \\ \hat{k}_2 &= \tfrac{9}{8}\sin\left(\tfrac{\pi\sin(\beta)}{N}\right) - \tfrac{1}{24}\sin\left(\tfrac{3\pi\sin(\beta)}{N}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь N — число точек расчётной сетки на одну длину волны, α — число Куранта, β — угол, определяющий направление распространения волны, c — фазовая скорость точного решения. Отсюда следует, что фазовая скорость численного решения c^{fd} зависит от размера шагов схемы и частоты сигнала, что неизбежно ведёт к изменению формы сигнала и смещению во времени. Тогда число точек расчётной сетки на одну длину волны можно представить как $N = \frac{2\pi c}{\omega h}$, где ω — частота, $h = h_x = h_z$, а число Куранта $\alpha = \frac{\sqrt{2}\tau c}{h}$. При этом для схемы (5) условие Куранта определяется как

$$\frac{\tau c}{h} \leq \frac{6}{7\sqrt{2}}. \tag{7}$$

В сейсморазведке пространственная дискретизация конструируется так, что численная ошибка фазовой скорости составляет

около 10^{-3}, исходя из того, что фазовый сдвиг регистрируемого сигнала не превышает четверти периода волны для типичных моделей [Moczo et al.,2010; Лисица, 2015]. Для рассматриваемой схемы дискретизация составляет не менее пяти точек расчётной сетки на минимальную длину волны [Levander, 1988; Gadylshin et al.,2024].

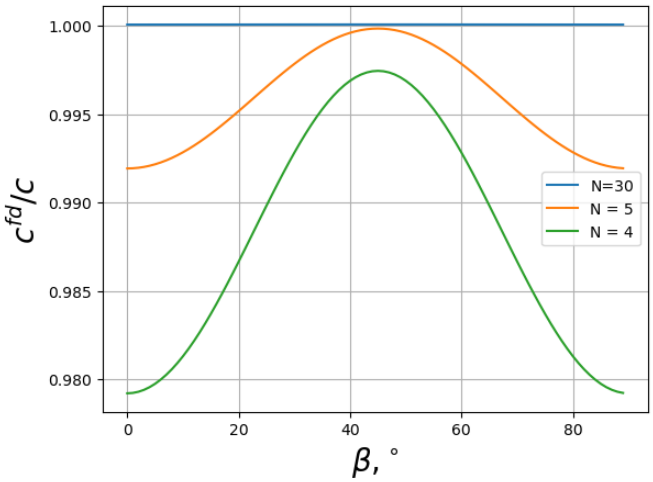

Рисунок 1 – Увеличение численной дисперсии с увеличением шага расчётной сетки при конечно-разностной схемы четвёртого порядка

Влияние шага дискретизации расчётной области на численную дисперсию анализируется на примере распространения сейсмической волны в однородной изотропной среде. В качестве источника берётся вейвлет Рикера с центральной частотой 30 Гц, коэффициент Куранта составляет 0.2. На графике зависимости отношения фазовой скорости численного решения к фазовой скорости истинного решения c^{fd}/c от угла β для различных точек на длину волны N (Рисунок 1) видно, что чем меньше количество точек на длину волны, тем значительнее численное решение отличается от истинного, при уменьшении N в 7.5 раза отношение c^{fd}/c отличается от единицы в зависимости от угла β [Gadylshin et al.,2024].

Ошибка в расчётах волновых полей при возмущении скоростной модели среды

Вторая важная ошибка в расчётах синтетических волновых полей проявляется вследствие возмущения скоростной модели среды, которое, например, возникает при усреднении коэффициентов системы уравнений при моделировании упругой волны (1), или при варьировании значений V_p, V_s, ρ в таких задачах, как сейсмический мониторинг парниковых газов в породе-коллекторе и обращение полного волнового поля [Muir et al.,1992; Moczo et al., 2002; Symes, Vdovina, 2009; Lisitsa, Podgornova, Tcheverda, 2010; Vishnevsky et al., 2014; Moczo et al., 2014; Moczo et al., 2018; Moczo et al., 2022].

Здесь рассматривается ошибка, связанная с усреднением коэффициентов конечно-разностной схемы при разрывах скоростной модели среды. Для одномерного случая доказывается сходимость второго порядка при использовании арифметического усреднения плотности и гармонического усреднения модуля упругости, даже если коэффициенты являются неоднородными [Samarskii, 2001; Lisitsa, Podgornova, Tcheverda, 2010]. В двумерном и трёхмерном случаях для гарантированного второго порядка сходимости решения с плоской волной [Muir et al., 1992; Vishnevsky et al., 2014; Moczo, Kristek, Galis, 2014] используется усреднение по методу Бакуса [Backus, 1962] или Шёнберга [Schoenberg, Muir, 1989] для мелкослойных сред. Для более сложных случаев, например для гетерогенной конечно-разностной схемы, используются современные требующие больших вычислительных затрат методы [Moczo et al., 2018; Moczo et al., 2022]. Наиболее распространённым под-

ходом считается арифметическое усреднение плотности и гармоническое усреднение модуля сдвига [Samarskii, 2001; Lisitsa et al., 2010]. При этом скоростная модель среды представляется в виде кусочно-постоянной функции. В этом случае плотность определяется как $\rho(x,z) = \rho_{k_1,k_2}$, где $(x,z) \in [H_x(k_1 - 1/2), H_x(k_1 + 1/2)] \times [H_z(k_3 - 1/2), H_z(k_3 + 1/2)]$ – координаты, H_x, H_z – это шаги дискретизации скоростной модели среды, аналогично определяются и параметры Ламе. Если шаги модельной сетки совпадают с шагами расчётной сетки $H_j = h_j$, то коэффициенты конечно-разностной схемы преобразуются следующим образом [Vishnevsky et al., 2014]:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{i_1+1/2,i_3} &= 0.5(\rho_{i_1,i_3} + \rho_{i_1+1,i_3}), \\ \hat{\rho}_{i_1,i_3+1/2} &= 0.5(\rho_{i_1,i_3} + \rho_{i_1,i_3+1}), \\ \hat{\mu}_{i_1+1/2,i_3+1/2} &= 4\left(\frac{1}{\mu_{i_1,i_3}} + \frac{1}{\mu_{i_1+1,i_3}} + \frac{1}{\mu_{i_1,i_3+1}} + \frac{1}{\mu_{i_1+1,i_3+1}}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{8}$$

В случае, когда шаги дискретизации скоростной модели среды меньше, чем шаги расчётной сетки, кусочно-постоянная функция заменяется другой кусочно-постоянной функцией с допустимым множеством пересекающихся границ внутри ячейки расчётной сетки. И тогда используется орторомбическая аппроксимация [Moczo et al., 2014] или её упрощённые версии. Однако формального доказательства тому, что в этом случае сохранится второй порядок сходимости, нет. В этом случае используется простая проекция независимо от исходного представления модели:

$$\begin{aligned} \rho_{i_1,i_3} &= \rho(h_1 i_1, h_3 i_3), \\ \lambda_{i_1,i_3} &= \lambda(h_1 i_1, h_3 i_3), \\ \mu_{i_1,i_3} &= \mu(h_1 i_1, h_3 i_3). \end{aligned} \tag{9}$$

Из анализа следует, что необходимо исследовать масштабируемость скоростной модели среды при численном моделировании распространения сейсмических волн, при этом для подавления указанных численных ошибок предлагается использовать нейронную сеть.

2.1.2. Использование нейронной сети NDM-net для подавления численных ошибок в сейсмограммах

Чтобы подавить оба типа численной ошибки, численную дисперсию и ошибки при возмущении скоростной модели среды, для повышения эффективности моделирования распространения сейсмических волн используется нейронная сеть: аппроксимируется оператор перехода сейсмограмм с численными ошибками в сейсмограммы с малыми их значениями минимизацией целевого функционала. При этом модуль алгоритма включает следующие этапы:

1. Для всех положений источников x_s^k, $k = 1, ..., N_s$, где N_s — количество источников, рассчитываются сейсмограммы - $\vec{u}_{h_2}(t, x_o, x_s^k)$ с использованием грубой расчётной сетки с характерным шагом сетки h_2 (см. раздел 2.1.1).

2. Формируется набор положений источников в виде набора индексов $D_t \subset \{1, ..., N_s\}$, соответствующих сейсмограммам для обучения нейронной сети NDM-net (см. главу 3).

3. Рассчитываются сейсмограммы $\vec{u}_{h_1}(t, x_o, x_s^k)$, $k \in D_t$ с использованием мелкой расчётной сетки с шагом дискретизации $h_1 < h_2$ (см. раздел 2.1.1).

4. Выполняется предобработка обучающей выборки сейсмо-

грамм с использованием быстрого преобразования Фурье (см. раздел 2.2.1).

5. Выполняется линейная нормализация выборки сейсмограмм для обучения нейронной сети NDM-net для перевода значения в диапазон значений [-1,1].

6. Обучающая выборка сейсмограмм случайным образом разделяется на тренировочную и валидационную выборку.

7. Задаются начальные значения гиперпараметров нейронной сети NDM-net: скорость обучения (от английского «learning rate»), количество эпох обучения, размер пакета (от английского «batch size»), параметры импульса (от английского «momentum parameters») – пользователем, значения весов θ нейронной сети NDM-net – случайно.

8. Обучается нейронная сеть NDM-net, т.е. обновляются веса θ на каждой эпохе для аппроксимации оператора перехода G : $\vec{u}_{h_2}(t, x_o, x_s^k) \to \vec{u}_G(t, x_o, x_s^k)$ для всех $k \in D_t$ минимизацией функции потерь $L(\theta)$ для выполнения следующего условия:

$$\begin{gathered} \|G\left[\vec{u}_{h_2}(t, x_o, x_s^k), \theta\right] - \vec{u}_{h_1}(t, x_o, x_s^k)\| \ll \\ \ll \|\vec{u}_{h_2}(t, x_o, x_s^k) - \vec{u}_{h_1}(t, x_o, x_s^k)\|, \end{gathered} \tag{10}$$

где G — оператор перехода данных с грубой расчётной сетки в данные с мелкой расчётной сеткой.

9. Обученная нейронная сеть применяется для всего набора сейсмограмм:

$$\vec{u}_G(t, x_o, x_s^k) = G\left[\vec{u}_{h_2}(t, x_o, x_s^k)\right], \tag{11}$$

для всех индексов $k \in \{1, ..., N_s\}$.

Для подавления численных ошибок используется ранее разработанная нейронная сеть NDM-net (англ. Numerical Dispersion Mitigation neural network —нейронная сеть, подавляющая численную дисперсию) (Рисунок 2) [Gadylshin et al., 2022; Gondyul et al., 2023; Gadylshin et al., 2023], на вход которой подаются результаты численного моделирования прямой задачи сейсмики на грубой расчётной сетке, а на выходе - сейсмограммы, полученные на мелкой расчётной сетке.

Архитектура нейронной сети NDM-net похожа на архитектуру нейронной сети U-net (англ. U-shaped neural network — нейронная сеть, имеющая форму U), которая разработана для классификации изображений в медицине [Ronneberger, Fischer, Brox, 2015]. Однако такая архитектура успешно применяется при решении задач типа «image-to-image» (изображение в изображение – в переводе на русский язык) [Yu, Ma, Wang, 2019; Zeng, Diao, Lu, 2021]. На схеме (Рисунок 2) видно, что архитектура нейронной сети NDM-net состоит из двух блоков: блока кодирования (coder — в англоязычной литературе) и блока декодирования (decoder — в англоязычной литературе). В первом блоке последовательно используются свёртка с размером ядра (4×4×4) и функция активации $ReLU(\cdot) = \max(0, \cdot)$, в результате применения которых данные преобразуются в карту признаков. Второй блок состоит из обратной свёртки, функции активации $LeakyReLU(\cdot) = \max(0, \cdot) + c\min(0, \cdot)$ с отрицательным коэффициентом наклона $c = -0.2$ и пакетной нормализации (batch normalization —в англоязычной литературе) [Ioffe, Szegedy, 2015], которые последовательно применяются к данным. Архитек-

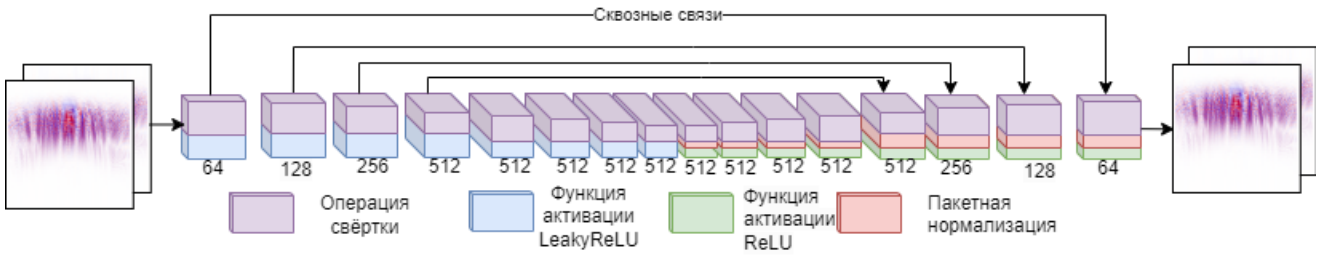

Рисунок 2 – Схематичное представление архитектуры нейронной сети NDM-net.

тура имеет пропускные соединения (skip connections —в англоязычной литературе) для сохранения пространственной структуры сейсмических данных.

Для ускорения обучения нейронной сети NDM-net в модуле алгоритма применяется оптимизационный мини–пакетный стохастический градиентный спуск (Stochastic gradient degree —в англоязычной литературе или сокращенно SGD) [Rosenblatt, 1958].

В процессе обучения нейронной сети параметры θ оптимизируются минимизацией функции потерь:

$$L(\Theta) = \mathbb{E}_{k \in D_t} \left[\left\| \vec{u}_{h_1}(t, x_o, x_s^k) - G\left[\vec{u}_{h_2}(t, x_o, x_s^k), \Theta\right] \right\|_1 \right], \qquad (12)$$

где $\Theta = \{\mathbf{W}, \mathbf{b}\}$ — параметры сети, включающие матрицу весов $\mathbf{W}$ и вектор смещений $\mathbf{b}$, $\mathbb{E}_{k \in D_t}$ — среднее значение по обучающей выборке.

Во всех численных экспериментах [Gadylshin et al., 2024; Гондюл и др., 2024; Gondyul et al., 2025] коэффициент скорости обучения варьирует с каждой эпохой обучения с использованием метода ReduceLROnPlateau (сокращение от Reduce learning rate on plateau — снижение скорости обучения на плато), который при застаивании процесса обучения позволяет снижать скорость обучения. В

качестве оптимизационного алгоритма используется Adam (сокращение от Adaptive Momentum — адаптированный момент) [Kingma, Ba, 2014; Sun et al., 2021].

2.2. Предобработка сейсмограмм с использованием быстрого преобразования Фурье

Одна из причин увеличения времени работы нейронной сети NDM-net при обработке – большой размер сейсмограмм, особенно в случае большого количества приёмников или трёхмерного моделирования: входные и выходные данные – это сейсмограммы 3-мерной или 2-мерной скоростной модели среды, т.е. функции двух пространственных переменных и времени с большим количеством временных отсчётов. В то же время при численном моделировании распространения волновых полей используются специфические вейвлеты с ограниченной полосой спектра. Как показывают исследования [Sneider, 2006; Zhao et al., 2022; Zhao et al., 2023], времени при обработке сейсмограмм в спектральной области Фурье требуется значительно меньше. Этот подход широко используется в сейсморазведке, где автокорреляция и спектральная плотность мощности временных рядов – основные объекты исследования [Sneider, 2006]. При структурном анализе интерпретация временных рядов также основывается на анализе Фурье [Zhao et al., 2022; Zhao et al., 2023; Zhang et al., 2023] при обработке резонансных частот. Кроме того, как показывают численные эксперименты [Gadylshin et al., 2024], при переводе сейсмограмм в частотную область не только сокращается время работы сети NDM-net, но и повышается точность

результатов обработки.

Интерполяция сигнала с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ) указывает на то, что сигнал, ограниченный полосой пропускания, определён на расчётной сетке. Добавлением к сигналу высоких частот можно интерполировать данные, однако на этих частотах сигнал важной информации не содержит [Kostin, 2015]. Если сейсмограммы записываются с плотной временной сеткой, то в спектре БПФ содержатся частоты, превышающие полосу частот исходного сигнала. Следовательно, высокочастотная часть сигнала является шумом. При учёте лишь полезного сигнала удаётся уменьшить размер сейсмограмм до размера полезных спектров, который редко превышает $1/4$ часть всего спектра сигнала.

Доказывается следующая теорема об оценке точности решения после применения NDM-net в спектральной области при усечении спектра записанного сигнала.

Теорема 1. *Погрешность решения системы уравнений динамической теории упругости, полученного с применением нейронной сети NDM-net удовлетворяет следующей оценке:*

$$\|u(t,\vec{x}_r) - u_{\mathcal{N}}(t,\vec{x}_r)\|_2 \leq C(h_f)^2 + \varepsilon_1(\nu_{lim}) + \varepsilon_2, \tag{13}$$

где $u(t^n,\vec{x}_j^r)$ — решение дифференциальной задачи, $u_{\mathcal{N}}(t^n,\vec{x}_j^r)$ — численное решение, полученное после применения нейронной сети NDM-net, определенные в точках приемников $\vec{x}_j^r$ в фиксированные моменты времени t^n, норма $\|\ \|_2$ — евклидова норма в соответствующем конечномерном пространстве; C — константа, не зависящая от шага расчетной сетки; h_f — шаг мелкой рас-

чётной сетки по пространству; $\varepsilon_1(\nu_{lim})$ *— погрешность, обусловленная усечением временного спектра решения (низкочастотной фильтрацией до частоты* ν_{lim}*);* ε_2 *— погрешность при применении нейронной сети NDM-net.*

Доказательство. Согласно предлагаемому алгоритму, численное решение, получаемое с использованием нейронной сети NDM-net можно представить как

$$u_{\mathcal{N}}(t,\vec{x}_r) = u_f(t,\vec{x}_r) + (\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{N}[R(\mathcal{F}[u_c(t,\vec{x}_r)],\nu_{lim})]\right] - \\ -u_f(t,\vec{x}_r)), \tag{14}$$

где $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ – прямое и обратное дискретное преобразование Фурье по времени, $R(v(\nu,\vec{x}^r))$ – оператор низкочастотной фильтрации:

$$R(v(\nu,\vec{x}^r)) = \begin{cases} v(\nu,\vec{x}^r), & |\nu| \le \nu_{lim}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{15}$$

Норма погрешности в этом случае может быть оценена как:

$$\begin{gathered} \|u_{\mathcal{N}}(t,\vec{x}_r) - u_f(t,\vec{x}_r)\| = \\ = \|\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{N}[R(\mathcal{F}[u_c(t,\vec{x}_r)],\nu_{lim})]\right] - u_f(t,\vec{x}_r)\| = \\ = \tfrac{1}{N_t}\|\mathcal{N}[R(\mathcal{F}[u_c(t,\vec{x}_r)],\nu_{lim})] - \mathcal{F}[u_f(t,\vec{x}_r)]\|, \end{gathered} \tag{16}$$

где N_t — число отсчётов по времени. Последнее равенство – следствие теоремы Парсеваля для дискретного преобразования Фурье.

Удобно ввести обозначение $v(\nu, \vec{x}_r) = \mathcal{F}[u(t, \vec{x}_r)]$, тогда

$$\begin{gathered} \|u_{\mathcal{N}}(t, \vec{x}_r) - u_f(t, \vec{x}_r)\| = \\ = \frac{1}{N_t}\|\mathcal{N}[R(\mathcal{F}[v_c(\nu, \vec{x}_r)], \nu_{lim})] - v_f(t, \vec{x}_r)\| \leq, \\ \leq \frac{1}{N_t}\|\mathcal{N}[R(v_c(\nu, \vec{x}_r), \nu_{lim}) - R(v_f(\nu, \vec{x}_r), \nu_{lim})\| + \\ + \frac{1}{N_t}\|v_f(\nu, \vec{x}_r) - R(v_f(\nu, \vec{x}_r), \nu_{lim})\| \end{gathered} \tag{17}$$

Далее вводится обозначение $w(\nu, \vec{x}^r) = R(v_f(\nu, \vec{x}^r), \nu_{lim})$ – результат действия низкочастотного фильтра. Тогда

$$\begin{gathered} \|u_{\mathcal{N}}(t, \vec{x}_r) - u_f(t, \vec{x}_r)\| \leq \\ \leq \frac{1}{N_t}\|\mathcal{N}[w_c(\nu, \vec{x}_r)] - w_f(\nu, \vec{x}_r)\| + \\ + \frac{1}{N_t}\|v_f(\nu, \vec{x}_r) - R(v_f(\nu, \vec{x}_r), \nu_{lim})\| = \varepsilon_2 + \varepsilon_1(\nu_{lim}). \end{gathered} \tag{18}$$

Ошибка, связанная с точностью решения после применения нейронной сети NDM-net ε_2, как показано в разделе зависит от размера обучающей выборки и от репрезентативности обучающей выборки.

Ошибка, вызванная низкочастотной фильтрацией сигнала $\varepsilon_1(\nu_{lim})$, может быть оценена как

$$\|v_f(\nu, \vec{x}_r) - R(v_f(\nu, \vec{x}_r), \nu_{lim})\| = \sqrt{\sum_{n=n_1}^{N_t}\sum_{j=1}^{N_r} v_f(\nu_n, \vec{x}_j^r)\bar{v}_f(\nu_n, \vec{x}_j^r)}, \tag{19}$$

где n_1 такой, что $\nu_{n_1-1} < \nu_{lim} \leq \nu_{n_1}$. Здесь N_t и N_r — число отсчетов по времени (частот) и число приемников. Здесь предполагается, что в качестве функции источника применяются функции с ограниченным носителем, либо быстроубывающие с ростом частоты, поэтому низкочастотная фильтрация вносит малую погрешность.

В частности в разделе приводятся численные оценки этой ошибки для случая импульса Рикера.

Для завершения доказательства необходимо рассмотреть полную погрешность:

$$\begin{gathered} \|u(t,\vec{x}_r) - u_{\mathcal{N}}(t,\vec{x}_r)\|_2 \leq \\ \leq \|u(t,\vec{x}_r) - u_f(t,\vec{x}_r)\| + \|u_f(t,\vec{x}_r) - u_{\mathcal{N}}(t,\vec{x}_r)\| \leq \\ \leq C(h_f)^2 + \varepsilon_1(\nu_{lim}) + \varepsilon_2. \end{gathered} \tag{20}$$

Первое слагаемое верно в силу аппроксимации и устойчивости рассматриваемой в работе конечно-разностной схемы, оценки двух других слагаемых получены выше.

□

Пусть рассматривается сигнал в виде $\phi(t)$, где $t \in [0,T]$, T — конечное время. При рассмотрении дискретного сигнала $\phi^n = \phi(t^n)$, определенного на сетке с узлами $t^n = n\tau$, где τ — это шаг по времени, конечное время при этом $T = (N-1)\tau$. Согласно дискретному анализу Фурье, спектр может быть представлен как $\psi(\omega^j), j = -N/2, ..., N/2$, где $\omega^j = j\Delta\omega$, при этом дискретизация частоты составляет $\Delta\omega = 2\pi/T$, где $\omega_{\max} = N\Delta\omega/2 = \pi/\tau$. Действительная часть спектра БПФ является четной функцией, тогда как мнимая - нечетной:

$$\Re\psi(\omega^j) = \Re\psi(\omega^{-j}),\ \ \Im\psi(\omega^j) = -\Im\psi(\omega^{-j}). \tag{21}$$

Отсюда следует, что рассматривается только половина спектра, соответствующая положительным частотам.

Во всех численных экспериментах [Gadylshin et al., 2024; Гон-

дюл и др., 2024; Гондюл и др., 2024; Gondyul et al., 2025] в качестве источника используется вейвлет Рикера, определяемый по формуле

$$f(t) = [1 - 2(\pi\nu_0 t)^2]e^{-(\pi\nu_0 t)^2}, . \tag{22}$$

где ν_0 – это центральная частота. При этом Фурье-образ импульса Рикера представляется в аналитическом виде:

$$g(\omega) = \frac{\omega^2}{2\pi^{5/2}\nu_0^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi^2\nu_0^2}}. \tag{23}$$

Затем выполняется замена переменных $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ и выводится функция

$$\tilde{g}(\nu) = \frac{2\nu^2}{\sqrt{\pi}\nu_0^2} e^{-\frac{\nu^2}{\nu_0^2}}. \tag{24}$$

Она имеет локальный максимум в точке $\nu = \nu_0$ и монотонно стремится к нулю, если $\nu \to \infty$. Формально импульс Рикера не является функцией с ограниченным диапазоном, но можно предположить, что

$$\frac{\tilde{g}(2.5\nu)}{\tilde{g}(\nu)} = 6.25e^{-5.25} \approx 0.033, \ \ \frac{\tilde{g}(3\nu)}{\tilde{g}(\nu)} \approx 0.003. \tag{25}$$

Ещё один необходимый элемент предобработки – нормализация данных, при которой значения сейсмограмм приводятся к заданному диапазону $[-1...1]$, например, по следующей формуле:

$$\vec{u}_h(t, x_o, x_s^k)' = \frac{\vec{u}_h(t, x_o, x_s^k)}{\vec{u}_h(t, x_o, x_s^k)_{max}}. \tag{26}$$

Обычно параметрические методы машинного обучения, такие как нейронные сети, растущие деревья, требуют симметричного и унимодального распределения данных из-за того, что при значи-

тельно отличающихся данных возникает неустойчивость и некорректность работы нейронной сети. Поэтому такое преобразование необходимо.

2.3. Численные эксперименты

Разработанный алгоритм программно реализован в двух научно - исследовательских версиях для использования на персональном компьютере с операционной системой Windows [Гондюл, 2024]. Для подготовки программ используется язык Python с пакетами: Pytorch, numpy. Корректность работы программного обеспечения протестирована на изотропных двумерных средах [Gadylshin et al., 2024; Гондюл и др., 2024; Гондюл и др., 2024; Gondyul et al., 2025]. Это позволяет применять программную реализацию алгоритма для подавления численной дисперсии в сейсмограммах, соответствующих 2-х и 3-х-мерным упругим скоростным моделям реальных геологических сред с целью уменьшения времени расчёта распространения сейсмических полей.

2.3.1. Известные метрики оценки качества результатов при использовании нейронной сети NDM-net

Для оценки качества скорректированных нейронной сетью данных специалистами используются следующие метрики:

– относительной ошибки [Tofallis, 2015]

$$\varepsilon_i = \varepsilon(u^i, v^i) = \frac{\|u^i(t, \vec{x_o}) - v^i(t, \vec{x_o})\|}{\|u^i(t, \vec{x_o})\|} \times 100\%, \qquad (27)$$

где u^i — решение прямой задачи при использовании мелкой сетки, соответствующее индексу источника i в положении $\vec{x}_s^i$, v^i — выходные данные NDM-net или решение прямой задачи при использовании грубой сетки, $\|\cdot\|$ — Евклидова норма;

– пикового отношения сигнала к шуму PSNR (сокращение от Peak Signal-to-Noise Ratio – пиковое отношение сигнала к шуму) [Hore, Ziou, 2010]

$$PSNR_i = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{(\max |u^i(t, \vec{x_o})|)^2}{\|u^i(t, \vec{x_o}) - v^i(t, \vec{x_o})\|^2} \right); \tag{28}$$

– индекс структурного сходства SSI (сокращение от Structural Similarity Index - индекс структурного сходства) [Hore, Ziou, 2010]

$$SSI_i = \frac{(2\mu_{u^i(t,\vec{x_o})}\mu_{v^i(t,\vec{x_o})} + c_1)(2\sigma_{u^i(t,\vec{x_o})v^i(t,\vec{x_o})} + c_2)}{(\mu^2_{u^i(t,\vec{x_o})} + \mu^2_{v^i(t,\vec{x_o})} + c_1)(\sigma_{u^i(t,\vec{x_o})} + \sigma_{v^i(t,\vec{x_o})} + c_2)}, \tag{29}$$

где $\mu_{u^i(t,\vec{x_o})}$ — среднее по $u^i(t, \vec{x_o})$, $\mu_{v^i(t,\vec{x_o})}$ — среднее по $v^i(t, \vec{x_o})$, $\sigma_{u^i(t,\vec{x_o})v^i(t,\vec{x_o})}$ — ковариация $u^i(t, \vec{x_o})$ и $v^i(t, \vec{x_o})$, $\sigma_{u^i(t,\vec{x_o})}$ — вариация $u^i(t, \vec{x_o})$, $\sigma_{v^i(t,\vec{x_o})}$ — вариация $v^i(t, \vec{x_o})$, $c_1 = (0.001L)^2$ и $c_2 = (0.03L)^2$ — две переменных, которые стабилизируют деление со слабым знаменателем, L — динамический диапазон значений пикселей.

Первая метрика используется для оценки качества данных, полученных с помощью нейронной сети NDM-net, последние же две метрики – для оценки структурных особенностей сейсмограмм.

Также, используется средняя относительная ошибка для оценки качества сейсмограмм, соответствующих всем положениям ис-

точников возбуждения x_s^i:

$$\overline{\varepsilon}(u,v) = \sum_{i=0}^{N_s} \varepsilon_i(u^i(t,\vec{x_o}), v^i(t,\vec{x_o})). \tag{30}$$

Для расчёта среднего пикового отношения $\overline{PSNR}(u,v)$ и индекса $\overline{SSIM}(u,v)$ используются аналогичные формулы.

2.3.2. Используемые для верификации алгоритма скоростные модели среды и их системы наблюдения

Скоростная модель BP двумерной среды

Распространенной скоростной моделью среды для верификации алгоритмов является модель BP (сокращение от British Petroleum – Британская нефть) [Billette, Brandsberg-Dahl, 2005] в виде контрастного соляного тела в центре и с плавным изменением значений P-скоростей в правой части (Рисунок 3). Размер модели 67.4 км – в горизонтальном направлении и 11.9 км – в вертикальном. Система наблюдения состоит из 2696 источников с расстоянием друг от друга 25 м. Количество приёмников для каждого источника - 512 с максимальным выбросом 6.4 км. В качестве источника используется вейвлет Рикера с центральной частотой 30 Гц. Для моделирования набора точных сейсмограмм используется расчётная сетка с шагом 3 м, для набора сейсмограмм с выраженной численной дисперсией - 6 м. Время записи трасс составляет 6 с при временном интервале 3 мс. Итак, сейсмограмма имеет размер 2000×512, где 2000 — временные отсчёты, 512 — количество трасс

в сейсмограмме.

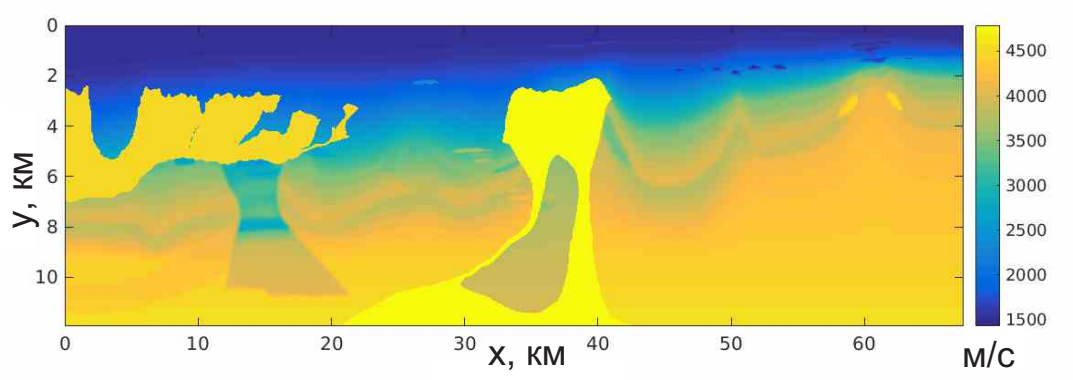

Рисунок 3 – Скоростная модель BP двумерной среды с соляным телом (значения P-скорости).

Скоростная модель Ванавара двумерной среды

Модель Ванавара разработана для отложений Восточной Сибири и представлена слоистой структурой с вертикальной интрузией [Gadylshin et al., 2024], размером 220 км в горизонтальном направлении и 2.6 км – в вертикальном. Система наблюдения состоит из 1901 источника с расстоянием друг от друга 100 м. Сейсмическое поле регистрируется 512 приёмниками с максимальным выбросом 6.4 км. Расстояние между приёмниками - 25 м. В качестве источника используется импульс Рикера с центральной частотой 30 Гц. P-скорости варьируются в значениях от 1 до 6 км/с (Рисунок 4). Рассчитываются два набора сейсмограмм: с использованием грубой сетки – с шагом 5 м и мелкой сетки – с шагом 2.5 м. Трассы записываются с временной дискретизацией 2 мс до 5 с. Так, размер сейсмограммы составляет 2500×512.

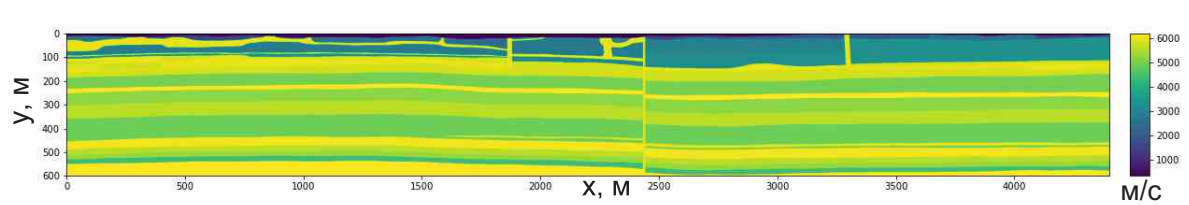

Рисунок 4 – Скоростная модель Ванавара двумерной среды со слоистыми отложениями и вертикальной интрузией (значения P-скорости)

Двумерная скоростная модель Мармуси двумерной среды

Для верификации алгоритма также используется скоростная модель среды Мармуси [Martin, Wiley, Marfurt, 2006] со слоистой структурой (Рисунок 5). Размер модели 17 км – в горизонтальном направлении и 3.6 км – в вертикальном. Используется система наблюдения из 171 источника, расположенных на расстоянии 100 м друг от друга. Приёмники расположены на расстоянии 25 м друг от друга, запись производится 512 приёмниками для каждого источника. Трассы записываются до 5 с при временной дискретизации 1 мс. Рассчитываются два набора данных на грубой расчётной сетке – с шагом 5 м и мелкой сетке – с шагом 2.5 м. Также используется импульс Рикера с центральной частотой 30 Гц в качестве источника.

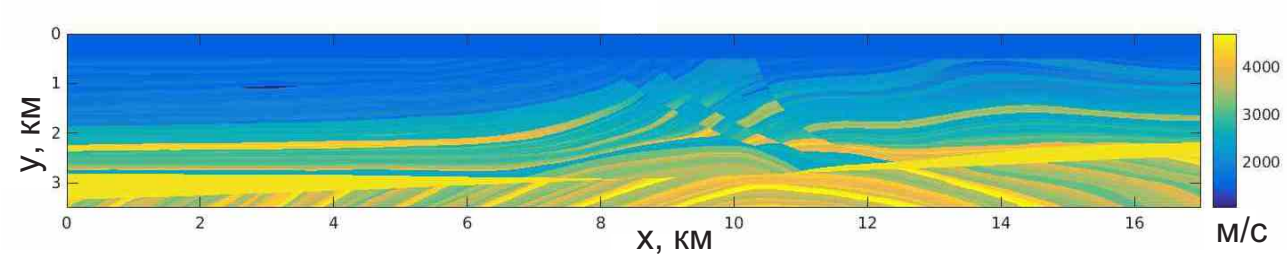

Рисунок 5 – Скоростная модель Мармуси двумерной слоистой среды со сложным геологическим строением (значение P-скорости)

2.3.3. Верификация алгоритма при подавлении численной дисперсии в сейсмограммах

Для оценки эффективности разработанного алгоритма моделирования сейсмических волновых полей с использованием сеточного метода и нейронной сети NDM-net выполняется серия численных экспериментов для указанных скоростных моделей изотропной среды [Gadylshin et al., 2024; Гондюл и др., 2024; Гондюл и др., 2024; Gondyul et al., 2025].

Первый эксперимент – подавление численной дисперсии в двумерных сейсмограммах, полученных с использованием скоростной модели BP. При этом для обучения формируются три выборки размерами $5, 10, 20\%$ от общего количества источников. При чём сейсмограммы в таких выборках соответствуют источникам, которые расположены друг от друга равноудалённо. Размер валидационной выборки данных составляет 5% от размера выборки для обучения. Задаётся начальное значение скорости обучения - 1e-3, а размер пакета - 5. Нейронная сеть обучается в течение 20 эпох до достижения минимума функции потерь (Рисунок 6), т.е. время обучения занимает примерно 60 минут.

Высокое качество подавления численной дисперсии по результатам применения обученной нейронной сети NDM-net к загрубленным сейсмограммам следует из сопоставления скорректированной нейронной сетью сейсмограммы, соответствующей расположению источника с положением $x_s = 3.2$ км, с сейсмограммой, полученной с использованием мелкой расчётной сетки с тем же положением источника (Рисунки 7 и 8). На результатах применения нейронной

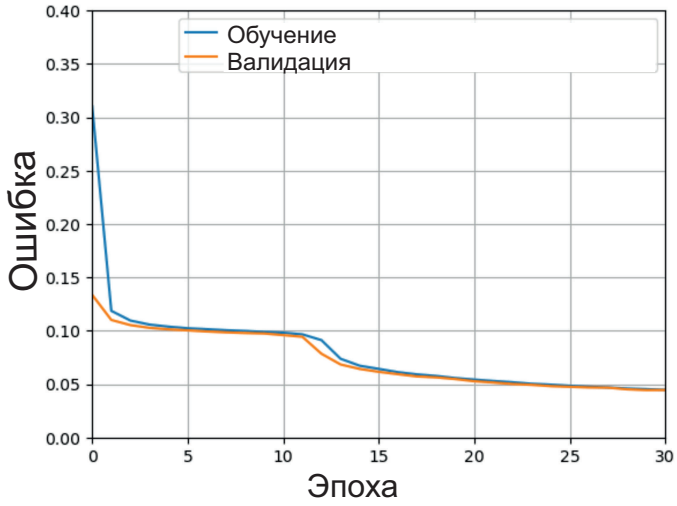

Рисунок 6 – Кривые обучения и валидации нейронной сети NDM-net для скоростной модели BP по результатам сопоставления скорректированных сейсмограмм и полученных с использованием мелкой расчётной сетки сейсмограмм.

сети NDM-net к загрублённым данным отмечается высокое качество подавления численной дисперсии, особенно в области первых вступлений.

На отдельных трассах (Рисунок 9) видно не только проявление численной дисперсии (фазовый сдвиг), но и высокое качество её подавления: решение на мелкой расчётной сетке совпадает с результатом коррекции с помощью нейронной сети NDM-net.

Средняя скорректированная относительная ошибка $\overline{\varepsilon}(u_G, u_{h_2})$ для всех сейсмограмм составляет 31.5% при использовании обучающей выборки размером 10% от общего количества источников. При этом начальная средняя относительная ошибка $\overline{\varepsilon}(u_{h_1}, u_{h_2})$ составляет 92.3%, пиковое отношение сигнала к шуму PSNR и индекс структурного сходства SSIM увеличиваются на 4% и 9% и приближаются к 100% и единице, соответственно (Таблица 1). Численные эксперименты по оценке подавления численной дисперсии показы-

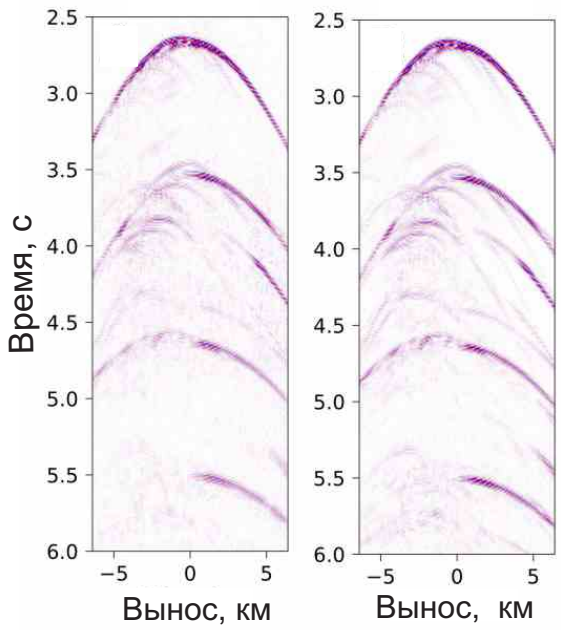

Рисунок 7 – Z-компонента вектора скорости смещений на сейсмограмме для скоростной модели BP, источника с положением $x_s = 3.2$ км по результатам коррекции нейронной сетью NDM-net (справа), с использованием мелкой расчётной сетки (слева).

вают, что с применением нейронной сети NDM-net она уменьшается в три раза (Рисунок 10) [Gadylshin et al., 2024; Гондюл и др., 2024; Гондюл и др., 2024; Gondyul et al., 2025].

Таблица 1 – Оценка точности подавления численной дисперсии в сейсмограммах при применении нейронной сети NDM-net для скоростной модели BP.

Размер обучающей выборки	**Средняя относительная ошибка** $\bar{\varepsilon}$	Стандартное отклонение относительной ошибки	Среднее отношение $\overline{PSNR}$	Среднее значение индекса $\overline{SSIM}$
Изначальная ошибка	92.3%	8.01%	89.91	0.88
5%	35.43%	7.10%	92.8	0.95
10%	31.5%	6.89%	93.62	0.96
20%	29.14%	5.91%	94.25	0.97

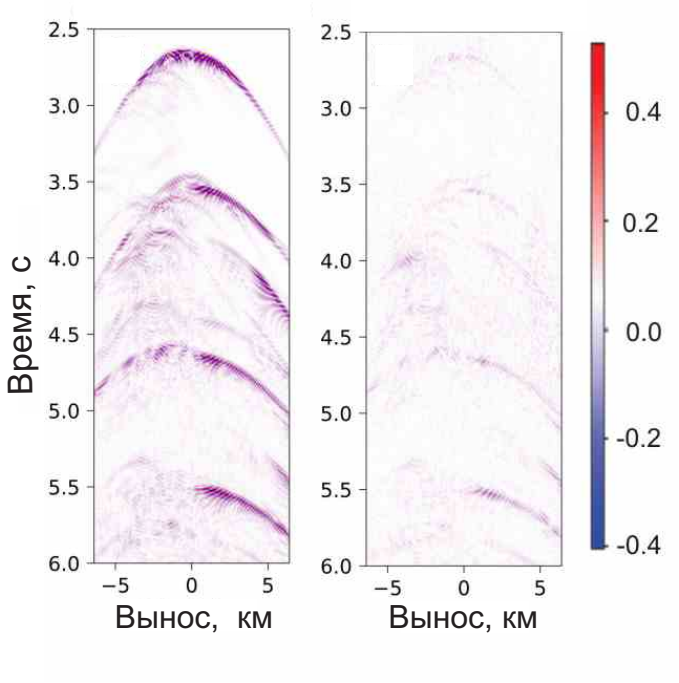

Рисунок 8 – Абсолютная разница z-компоненты вектора скорости смещений на сейсмограмме для скоростной модели BP, источника с положением $x_s = 3.2$ км между решениями на мелкой и грубой расчётных сетках (слева), между решением на мелкой расчётной сетке и результатом применения нейронной сети NDM-net (справа).

Анализ абсолютной разницы рассчитанных сейсмограмм с нулевым удалением приёмников по результатам расчёта на мелкой расчётной сетке и результатов коррекции нейронной сетью NDM-net показывает, что численная дисперсия подавляется примерно в 2 раза (с 69.1% до 36.3%) в L_2-метрике (27) (Рисунок 11). При применении обученной нейронной сети NDM-net к тестовой выборке добавляется некоррелированный шум в волновое поле, который легко устраняется с помощью стандартных процедур шумоподавления [Guo et al., 2024; Lian, Chen, 2025].

Второй эксперимент – подавление численной дисперсии в сейсмограммах для двумерных сред, полученных с использованием

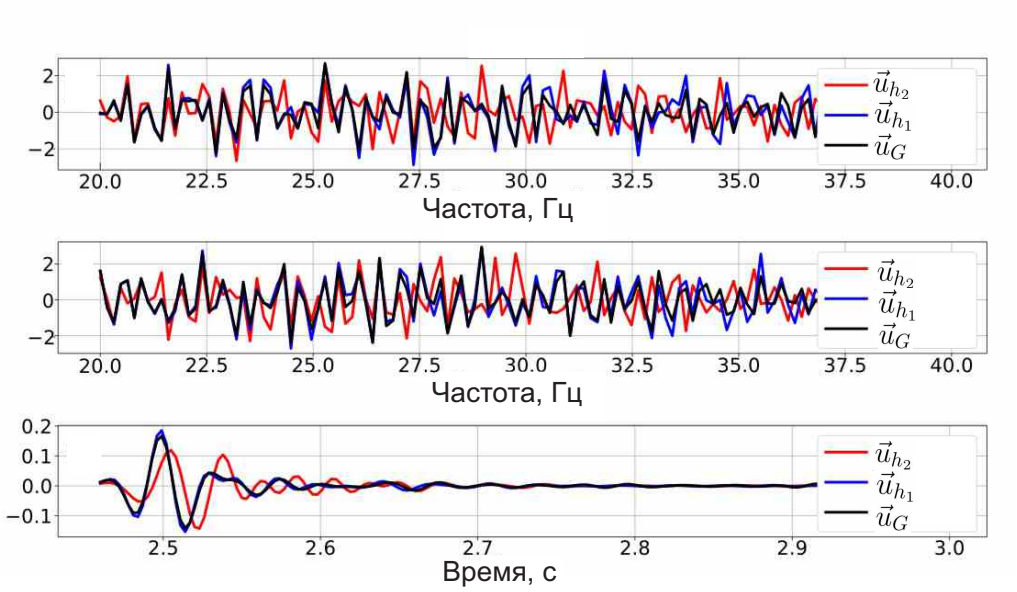

Рисунок 9 – Сейсмическая трасса z-компоненты вектора скорости смещений для скоростной модели BP, источника с положением $x_s = 3.2$ км в частотной области (действительная компонента – наверху, мнимая компонента – посередине), во временной области (внизу).

скоростной модели Ванавара. Для этого формируется обучающая выборка размером 10% от общего количества источников в системе наблюдения, при этом так же, как и в первом эксперименте, источники располагаются на равном расстоянии друг от друга. Валидационная выборка – это 5% данных из обучающей выборки, а стартовое значение скорости обучения составляет 1e-3, размер пакета - 5. Нейронная сеть NDM-net при таких условиях обучается в течение 50 эпох до достижения минимума функции потерь, при этом кривые обучения и валидации имеют такой же характер, как и в первом эксперименте (Рисунок 6).

Высокая эффективность подавления численной дисперсии при применении нейронной сети NDM-net следует из анализа сейсмограмм с нулевым удалением приёмников, т.е. трассировки, в кото-

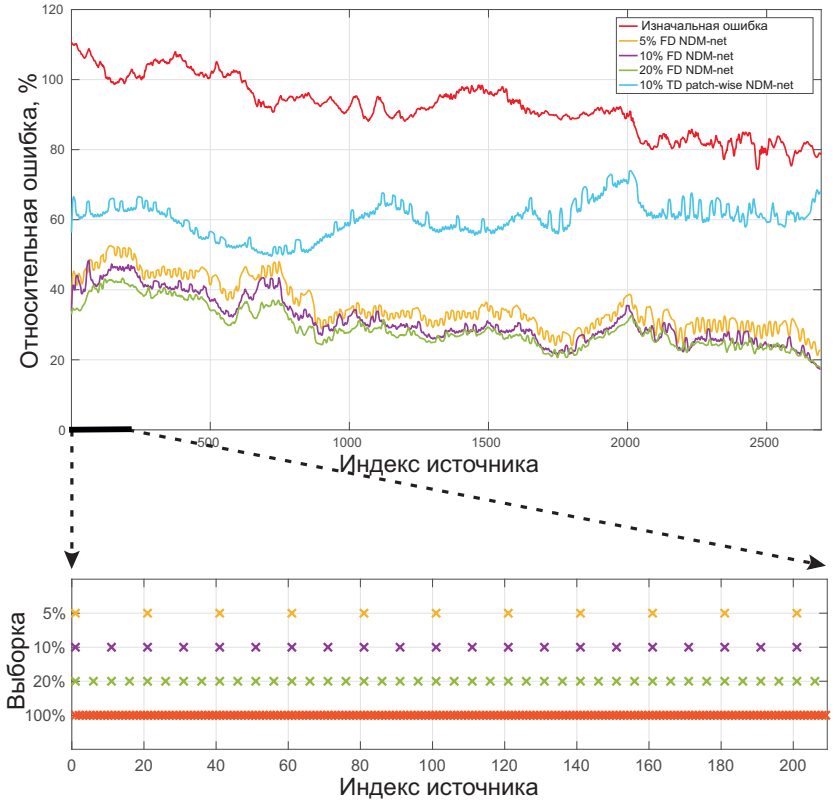

Рисунок 10 – Относительная ошибка $\varepsilon(u_{h_1}, u_{h_2})$ между сейсмограммами для скоростной модели BP по результатам расчёта на грубой сетке и расчёта на мелкой сетке. Относительные ошибка $\varepsilon(u_G, u_{h_2})$ между сейсмограммами по результатам обработки с использованием нейронной сети NDM-net и расчёта на мелкой сетке для различных сценариев (а). Распределение источников при различных обучающих выборках (б).

рой положения источника и приёмника совпадают (Рисунок 12). При этом на временных разрезах видно, что скорректированные нейронной сетью NDM-net данные аналогичны, как и в первом эксперименте. Разница в значениях между временными разрезами, полученными с использованием мелкой и крупной расчётных сеток, существенна именно вблизи области сильных отражений и составляет в среднем 26.2% из-за сдвига фазы сигнала, вызванного численной дисперсией. При использовании нейронной сети NDM-net

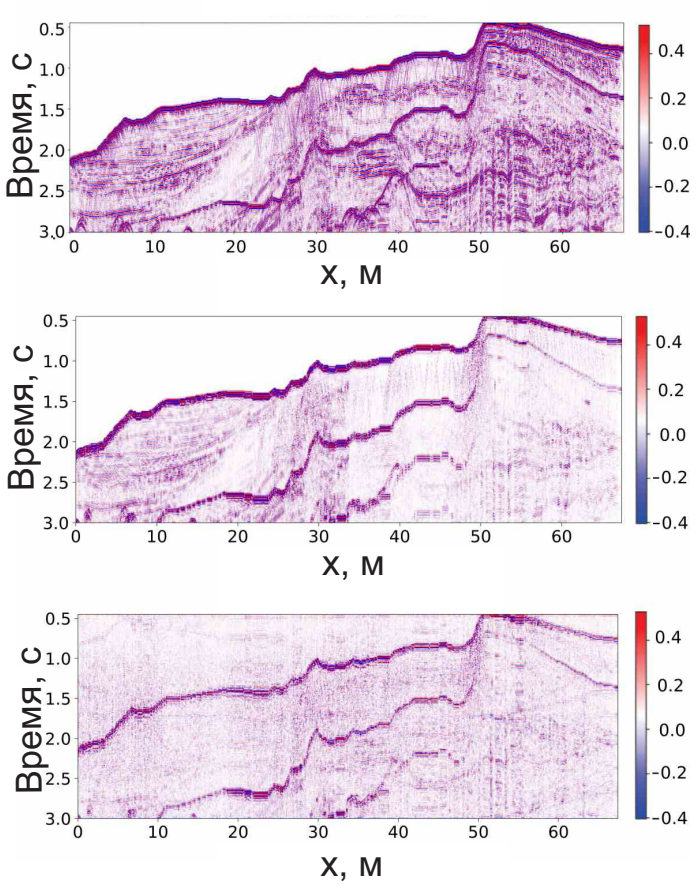

Рисунок 11 – Сейсмограмма с нулевым удалением приёмников для скоростной модели BP по результатам расчёта на мелкой сетке (вверху), абсолютная разница между результатами решения на мелкой и грубой сетках (посередине), между результатами решения на мелкой сетке и применения нейронной сети NDM-net (внизу).

смещение сейсмических событий как при сильных, так и при слабых отражениях значительно уменьшается, при этом среднее значение результирующей ошибки составляет 12.1%. В то же время при использовании нейронной сети NDM-net усиливается загрязнение волнового поля. Однако шум не коррелирует со значениями, поэтому легко устраняется с помощью стандартных процедур шумоподавления [Guo et al., 2024; Lian, Chen, 2025].

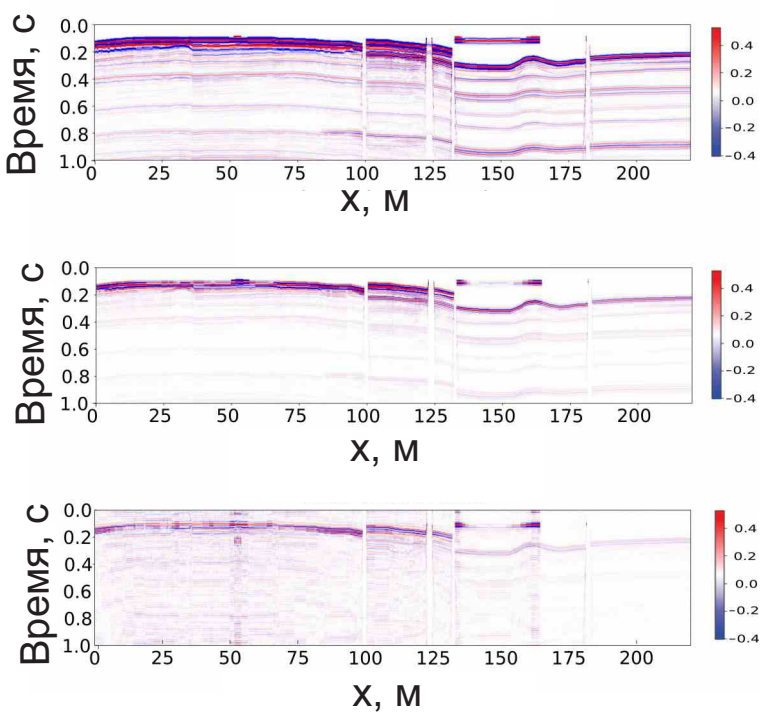

Рисунок 12 – Сейсмограмма с нулевым удалением приёмников для скоростной модели Ванавара по результатам расчёта на мелкой сетке (вверху), абсолютная разница между результатами решения на мелкой и грубой сетках (посередине) и между результатами решения на мелкой сетке и решения после применения нейронной сети NDM-net (внизу)

Аналогично, относительная ошибка ε уменьшается в три раза при применении нейронной сети NDM-net, а значения пикового отношения сигнала к шуму PSNR и индекса структурного сходства SSIM увеличиваются на 41% и 21% соответственно (Таблица 2).

Третий эксперимент по оценке точности подавления численной дисперсии в сейсмограммах выполнен с использованием скоростной модели Мармуси и для тех же параметров, что и во втором эксперименте. В результате получены сейсмограммы с нулевым удалением приёмников (Рисунок 13). Как и в предыдущих экспериментах, значения сейсмограмм расходятся вблизи области

Таблица 2 – Оценка точности подавления численной дисперсии в сейсмограммах при применении нейронной сети NDM-net для скоростной модели Ванавара.

Размер обучающей выборки	**Средняя относительная ошибка** $\overline{\varepsilon}$	Стандартное отклонение относительной ошибки	Среднее отношение $\overline{PSNR}$	Срденее значение индекса $\overline{SSIM}$
Изначальная ошибка	114.6%	5.9%	36.4	0.8
5%	21.22%	8.7%	51.5	0.97
10%	21.1%	11.4%	51.2	0.96
30%	17.63%	4.88%	52.9	0.97

сильных отражений, где преобладает фазовый сдвиг сигнала из-за численной дисперсии. С использованием обученной нейронной сети NDM-net такое расхождение в виде скоррелированного шума эффективно устраняется до среднего значения относительной ошибки $\overline{\varepsilon}(u_G, u_{h_2}) = 29.9\%$ при изначальной ошибке $\overline{\varepsilon}(u_{h_1}, u_{h_2}) = 92.1\%$. Скоростная модель Мармуси имеет самую маленькую систему наблюдения и обучающую выборку данных. Однако результаты подавления численной дисперсии в сейсмограммах оказываются самыми значительными среди рассмотренных моделей. Это объясняется относительной простотой модели Мармуси, в которой нет экстремальных субвертикальных отражательных элементов, таких как соляные тела и магматические интрузии. Рассчитанные средние ошибки между сейсмограммами по всем положениям источников, отклонение средней относительной ошибки и другие метрики показывают, что численная дисперсия для этой скоростной модели подавляется в 2.5 раза в L_2-норме (Таблица 3) [Gadylshin et al., 2024; Гондюл и др., 2024; Гондюл и др., 2024; Gondyul et al., 2025].

Таблица 3 – Оценка точности подавления численной дисперсии в сейсмограммах при применении нейронной сети NDM-net для скоростной модели Мармуси.

Размер обучающей выборки	**Средняя относительная ошибка** $\overline{\varepsilon}$	Стандартное отклонение относительной ошибки	Среднее отношение $\overline{PSNR}$	Среднее значение индекса $\overline{SSIM}$
Изначальная ошибка	65.83%	3.92%	269.5	0.957
20%	27.2%	3.61%	277.3	0.984
60%	25.52%	3.41%	277.8	0.986

Итак, из анализа следует, что высокая численная дисперсия как следствие увеличенного шага расчётной сетки для всех трёх моделей успешно подавляется при использовании нейронной сети NDM-net, особенно в областях контрастных отражений и первых вступлений.

2.3.4. Верификация алгоритма с использованием нейронной сети NDM-net для подавления численной ошибки в сейсмограммах при возмущении скоростной модели среды

Среди скоростных моделей изотропной среды с хорошим разрешением в свободном доступе известна лишь одна – изотропно-слоистая упругая модель Мармуси [Martin, Wiley, Marfurt, 2006]. Поэтому для исследования применения нейронной сети NDM-net к подавлению численных ошибок, которые представляют собой численную дисперсию и ошибку, вызванную грубой дискретизацией скоростной модели среды, используется именно указанная модель.

Для дискретизации скоростной модели среды используются

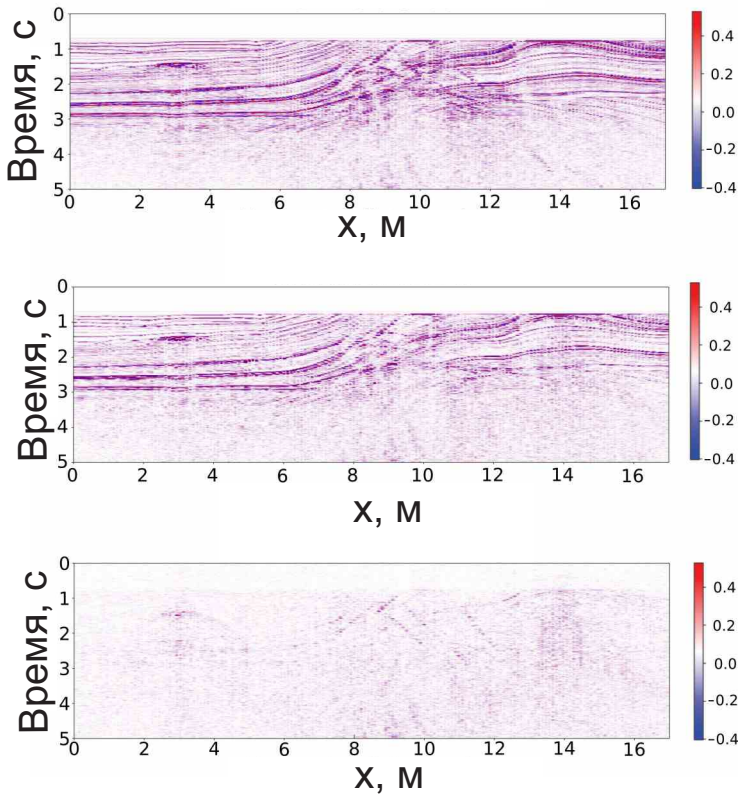

Рисунок 13 – Сейсмограмма с нулевым удалением приёмников для скоростной модели Мармуси по результатам расчёта на мелкой сетке (вверху), абсолютная разница между результатами решения на мелкой и грубой сетках (посередине) и между результатом решения на мелкой сетке и применения нейронной сети NDM-net (внизу).

три сетки: мелкая сетка M^f с шагами $H_1^f = H_3^f = 1.25$ м, средняя сетка M^i с шагами $H_1^i = H_3^i = 2.5$ м и грубая сетка M^c с шагами $H_1^c = H_3^c = 5$ м. Также варьируется расчётная сетка для моделирования распространения сейсмических волн в рассматриваемой среде: мелкая сетка G^f с шагами $h_1^f = h_3^f = 1.25$ м, средняя сетка G^i с шагами $h_1^i = h_3^i = 2.5$ м и грубая сетка G^c с шагами $h_1^c = h_3^c = 5$ м.

Согласно приведённой блок-схеме (Рисунок 14) [Gondyul et al., 2025], рассматриваются три варианта численных экспериментов:

1) при фиксированной дискретизации скоростной модели среды для подавления численной дисперсии используются расчётные сетки G^c, G^i и G^f (горизонтальное направления блок-схемы);

2) при фиксированной расчётной сетке подавления ошибок, связанных с дискретизацией модели среды, используются сетки M^c, M^i, M^f (вертикальное направление блок-схемы);

3) подавление численной дисперсии и ошибок дискретизации скоростной модели среды с вариациями расчётной сетки и дискретизацией скоростной модели среды (диагональное направление блок-схемы).

Первый вариант проверен численными экспериментами [Gondyul et al., 2025]. Второй вариант требует моделирования на максимально мелкой вычислительной сетке G^f с варьируемой сеткой модели среды M^c, M^i, M^f (вертикальное направление на блок-схеме). Этой серией экспериментов оценивается численная ошибка, связанная с огрублением модели, и выясняется возможность её уменьшения с помощью нейронной сети NDM-net. В третьем варианте варьируются расчётная сетка и разрешение скоростной модели среды (диагональное направление на блок-схеме). Это наиболее практически важный эксперимент, когда представлены оба типа численной ошибки для подавления с помощью нейронной сети NDM-net.

Сейсмограммы с различными расчётными сетками и дискретизацией скоростной модели среды обозначаются как $S_j^{M^*,G^*}(t,\vec{x}_o)$, где индекс j указывает на номер источника, t - время, $\vec{x}_o$ - смещение, M^* и G^* - сетки для дискретизации модели и для симуляции соответственно. Для всех экспериментов дискретность вре-

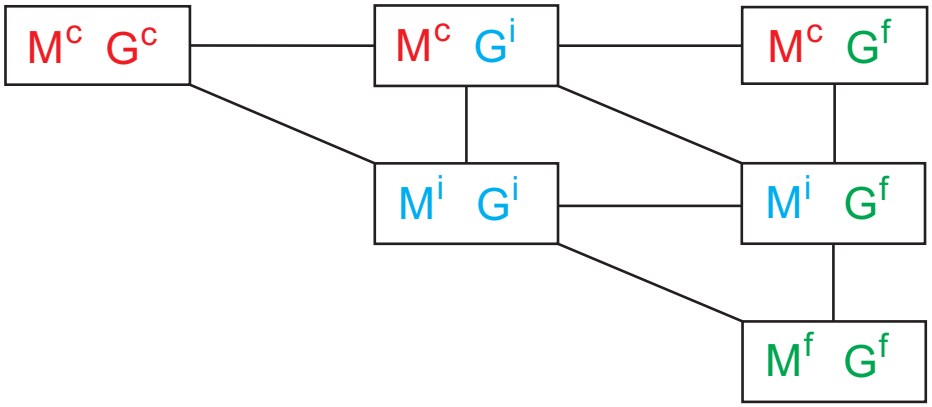

Рисунок 14 – Блок-схема численных экспериментов для различных комбинаций дискретизации скоростной модели среды M^* и расчётных сеток G^*.

мени, время записи, расстояние между приемниками и количество приемников совпадают. Если так, то относительную ошибку можно представить в виде метрики

$$\begin{aligned} \delta_j[(M^1,G^1),(M^2,G^2)] &= \frac{\|S_j^{M^1,G^1}(t,x_o) - S_j^{M^2,G^2}(t,x_o)\|}{\|S_j^{M^1,G^1}(t,x_o)\|} \times 100\%, \\ \|S_j^{M^*,G^*}(t,x_o)\| &= \frac{1}{N_t}\frac{1}{N_r}\sqrt{\sum_{n=1}^{N_t}\sum_{k=1}^{N_r}\left[S_j^{M^*,G^*}(t_n,(x_o)_k)\right]^2}, \end{aligned} \tag{31}$$

где N_t – количество временных выборок в сейсмограмме, N_r – количество приемников, $t_n = n \cdot dt$ – момент времени, $(x_o)_k$ - положение k-го приемника.

При этом относительная ошибка $\delta_j[(M^1,G^1),(M^2,G^2)]$ представляет собой расхождение между двумя сейсмограммами и зависит от номера источника. Для расчёта относительной ошибки по всему набору данных используется среднее значение ошибки по

всем позициям источников:

$$D[(M^1, G^1), (M^2, G^2)] = \frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} \delta_j[(M^1, G^1), (M^2, G^2)], \qquad (32)$$

где N_s - количество источников в системе наблюдения, т.е. количество сейсмограмм.

Из анализа рассчитанных средних относительных ошибок D (Таблица 4) следует, что вызванная численной дисперсией средняя относительная ошибка при фиксированной дискретизации скоростной модели достигает $60-80\%$, что делает наборы данных с грубой сеткой неприемлемыми для дальнейшего использования в сейсмической обработке. Напротив, если расчётная сетка фиксированная, а дискретизация скоростной модели среды меняется, то средняя относительная ошибка не превышает 30%. Следовательно, при изменении дискретизации скоростной модели среды и расчётной сетки доминирует численная дисперсия. Более того, численная ошибка не является аддитивной, так как в последнем случае относительная ошибка D не превышает таковую в случае экспериментов с фиксированной скоростной моделью среды.

Для определения влияния дискретизации модели и вычислительной сетки на результаты численного моделирования рассматривается абсолютная разность между сейсмограммами с положением источника возбуждения $x_s = 1.5$ км:

- $dS_{15}[(M^c, G^c), (M^c, G^f)] = |S_{15}^{M^c,G^c} - S_{15}^{M^c,G^f}|$;
- $dS_{15}[(M^c, G^f), (M^f, G^f)] = |S_{15}^{M^c,G^f} - S_{15}^{M^f,G^f}|$;
- $dS_{15}[(M^c, G^c), (M^f, G^f)] = |S_{15}^{M^c,G^c} - S_{15}^{M^f,G^f}|$.

Таблица 4 – Средняя относительная ошибка D (в %) между наборами данных с различными расчётными сетками и дискретизациями скоростной модели среды Мармуси

	S^{M^c,G^c}	S^{M^c,G^i}	S^{M^c,G^f}	S^{M^i,G^i}	S^{M^i,G^f}	S^{M^f,G^f}
S^{M^c,G^c}	0	65.83	60.31	51.58		55.32
S^{M^c,G^i}	63.83	0	21.18	33.76	26.06	
S^{M^c,G^f}	60.31	21.18	0		19.58	25.26
S^{M^i,G^i}	51.58	33.76		0	27.49	20.62
S^{M^i,G^f}		26.06	19.58	27.49	0	18.54
S^{M^f,G^f}	55.32		25.26	20.62	18.54	0

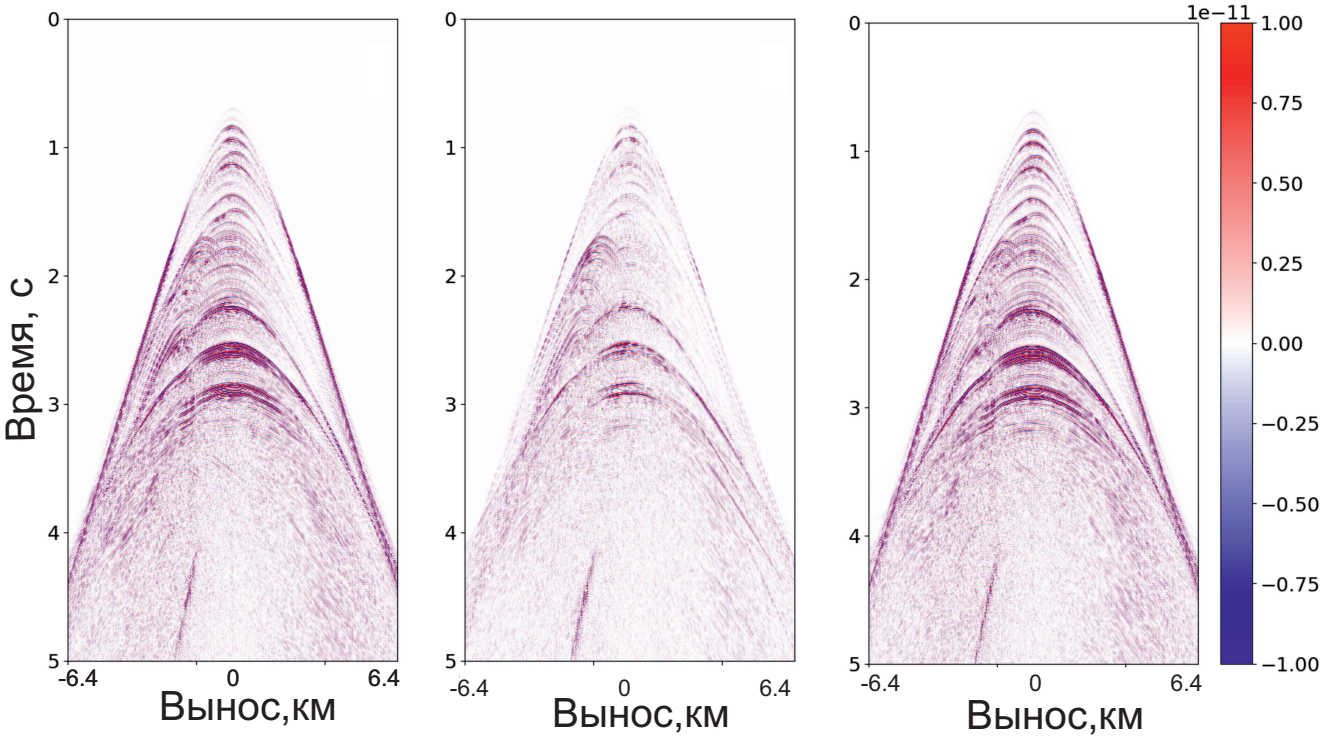

Рисунок 15 – Абсолютная разница z-компоненты вектора скорости смещения на сейсмограмме для скоростной модели Мармуси между решениями $dS_{15}[(M^c, G^c), (M^f, G^f)]$ (справа), $dS_{15}[(M^c, G^f), (M^f, G^f)]$ (посередине), и $dS_{15}[(M^c, G^c), (M^c, G^f)]$ (слева).

На сейсмограммах (Рисунок 15) видно, что они имеют одинаковый коэффициент усиления по амплитуде. Следовательно, численная ошибка, вызванная грубой дискретизацией скоростной мо-

дели среды, меньше, чем ошибка, вызванная численной дисперсией.

Для обучения и настройки параметров нейронной сети NDM-net подавлению численных ошибок в сейсмограммах используется метод оптимизации Adam [Kingma, Ba, 2014] с начальной скоростью обучения $2e-4$, значение которой планировщик уменьшает в два раза при замедлении процесса обучения. Нейронная сеть NDM-net обучается до сходимости в течение 700 эпох с размером пакета 5. Для обучающей выборки используется 20% источников от общего числа, для валидационной выборки – 5%, остальные данные 75% источников используются для тестовой выборки. Сейсмограммы в обучающей и валидационной выборках соответствуют источникам, которые равноудалены друг от друга.

Применение нейронной сети к одновременному подавлению двух типов численных ошибок рассматривается на обучении 12 нейронных сетей NDM-net, отображающих данные с большой численной дисперсией при возмущении скоростной модели в данные, рассчитанные на более мелкой сетке, или для более точной скоростной модели (соответствующие непустым записям) (Таблица 4). Результат применения нейронной сети NDM-net, например, отображающей сейсмограммы, рассчитанные на сетке G^2 для модели с сеткой M^2, на сейсмограммы, соответствующие вычислительной сетке G^1 и дискретизации модели M^1, обозначается как $\mathcal{N}^{M^1,G^1}(S^{M^2,G^2})$. Сетки M^1 и G^1 не крупнее M^2 и G^2, соответственно. Относительная ошибка между результатами, полученными на мелкой расчётной сетке, и результатами применения нейронной сети NDM-net выражается в виде формулы

$$\hat{\delta}_j[(\hat{M}^1,\hat{G}^1),(M^2,G^2)] = \frac{\|\mathcal{N}^{M^1,G^1}[S_j^{M^2,G^2}]-S_j^{M^1,G^1}\|}{\|S_j^{M^1,G^1}\|}\times 100\%,$$
$$\hat{D}[(\hat{M}^1,\hat{G}^1),(M^2,G^2)] = \frac{1}{N_s}\sum_{j=1}^{N_s}\hat{\delta}_j[(\hat{M}^1,\hat{G}^1),(M^2,G^2)]. \quad (33)$$

При этом рассчитывается относительная ошибка $\hat{D}[(\hat{M}^1,\hat{G}^1),(M^2,G^2)]$ для всех 12 обученных нейронных NDM-net (Таблица 5). Блоки на главной диагонали таблицы соответствуют фиксированной дискретизации модели и изменяющейся расчётной сетке При этом таблица несимметрична, так как нейронная сеть NDM-net используется только для отображения решения на грубой сетке на решение на тонкой сетке, что соответствует верхней треугольной части таблицы.

Таблица 5 – Средняя относительная ошибка $\hat{D}$ (в %) между наборами сейсмограмм после применения нейронной сети NDM-net для скоростной модели Мармуси.

	S^{M^c,G^c}	S^{M^c,G^i}	S^{M^c,G^f}	S^{M^i,G^i}	S^{M^i,G^f}	S^{M^f,G^f}
$\mathcal{N}(M^c,G^c)$	0	27.42	25.5	28.33		30.96
$\mathcal{N}(M^c,G^i)$	-	0	17.14	19.18	23.04	
$\mathcal{N}(M^c,G^f)$	-	-	0		18.46	20.18
$\mathcal{N}(M^i,G^i)$	-	-		0	17.19	17.72
$\mathcal{N}(M^i,G^f)$		-	-	-	0	11.01
$\mathcal{N}(M^f,G^f)$	-		-	-	-	0

Результаты применения нейронной сети NDM-net для подавления численной ошибки отражаются на сейсмограммах с абсолютной разницей в значениях между z-компонентами вектора скорости смещений для случайного положения источника $x_s = 1.5$ км (Рисунок 16):

- $d\hat{S}_{15}[(M^c,G^c),(M^f,G^f)] = |\mathcal{N}^{M^f,G^f}[S_{15}^{M^c,G^c}] - S_{15}^{M^f,G^f}|$

- $d\hat{S}_{15}[(M^c, G^f), (M^f, G^f)] = |\mathcal{N}^{M^f,G^f}[S_{15}^{M^c,G^f}] - S_{15}^{M^f,G^f}|$
- $d\hat{S}_{15}[(M^c, G^c), (M^c, G^f)] = |\mathcal{N}^{M^c,G^f}[S_{15}^{M^c,G^c}] - S_{15}^{M^c,G^f}|$

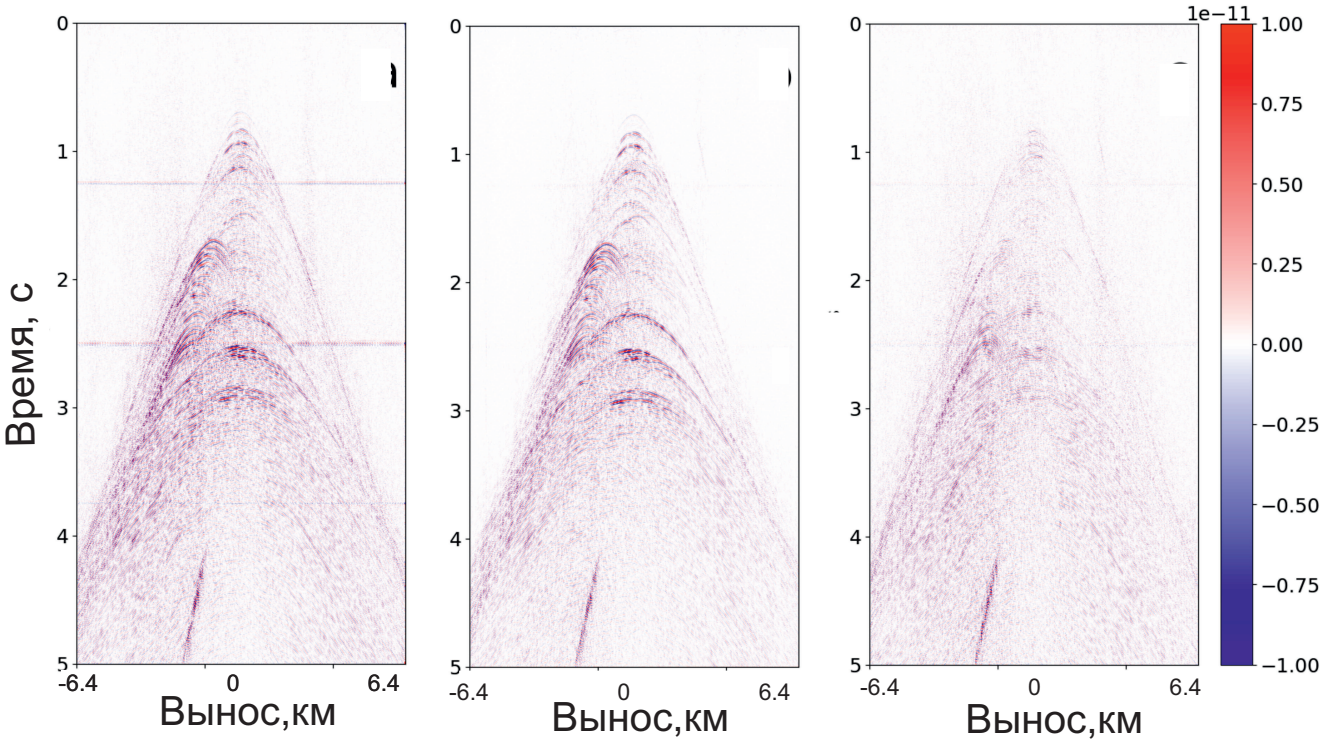

Рисунок 16 – Абсолютная разница z-компоненты вектора скорости смещений на сейсмограмме для скоростной модели Мармуси между результатом численного моделирования и результатом применением NDM-net $d\hat{S}_{15}[(M^c, G^c), (M^f, G^f)]$ (a), $d\hat{S}_{15}[(M^c, G^f), (M^f, G^f)]$ (b), и $d\hat{S}_{15}[(M^c, G^c), (M^c, G^f)]$ (c).

На левой сейсмограмме – отображение данных, рассчитанных на грубой сетке для грубой дискретизации скоростной модели среды, на данные, рассчитанные на мелкой сетке для тонкой дискретизации скоростной модели среды. На этой сейсмограмме видно, что оба типа численной ошибки подавляются при использовании нейронной сети NDM-net. На сейсмограмме посередине численная ошибка, связанная с дискретизацией скоростной модели, уменьша-

ется. А на правой сейсмограмме уменьшается численная ошибка, вызванная только численной дисперсией.

Из анализа сейсмограмм следует, что результирующая численная ошибка во всех рассмотренных случаях примерно одинакова: средняя относительная ошибка $\hat{D}$ составляет около 20% (Таблица 5). Этот результат хорошо коррелирует с предыдущими результатами применения нейронной сети NDM-net [Gadylshin et al., 2022; Gondyul et al., 2023; Gadylshin et al., 2023]. Точность коррекции сейсмограмм при использовании нейронной сети составляет около 20%. Итак, с использованием нейронной сети NDM-net численная дисперсия подавляется в три-четыре раза (с $60 - 80\%$ примерно до 20%). Напротив, численная ошибка, вызванная огрублением скоростной модели, изначально меньше и близка по точности к результатам применения нейронной сети NDM-net, в результате которого такой тип численной ошибки снижается с 25% до $18 - 20\%$.

Для примера приводится одна сейсмическая трасса, рассчитанная с использованием разных расчётных сеток, и абсолютная разница в значениях между расчетным решением и мелкосеточным решением, а также трасса после коррекции NDM-net (Рисунок 17). Расчёты показывают, что численная дисперсия влияет как на форму вейвлет-сигнал, так и на значение фазового сдвига, в то время как численная ошибка при грубой дискретизации скоростной модели сосредоточена в фазовом сдвиге. После коррекции нейронной сетью NDM-net и форма вейвлета, и фазовый сдвиг уменьшаются, при этом уменьшается численная ошибка.

Для оценки влияния численной дисперсии рассчитываются сейсмограммы с нулевым удалением приёмников для основных

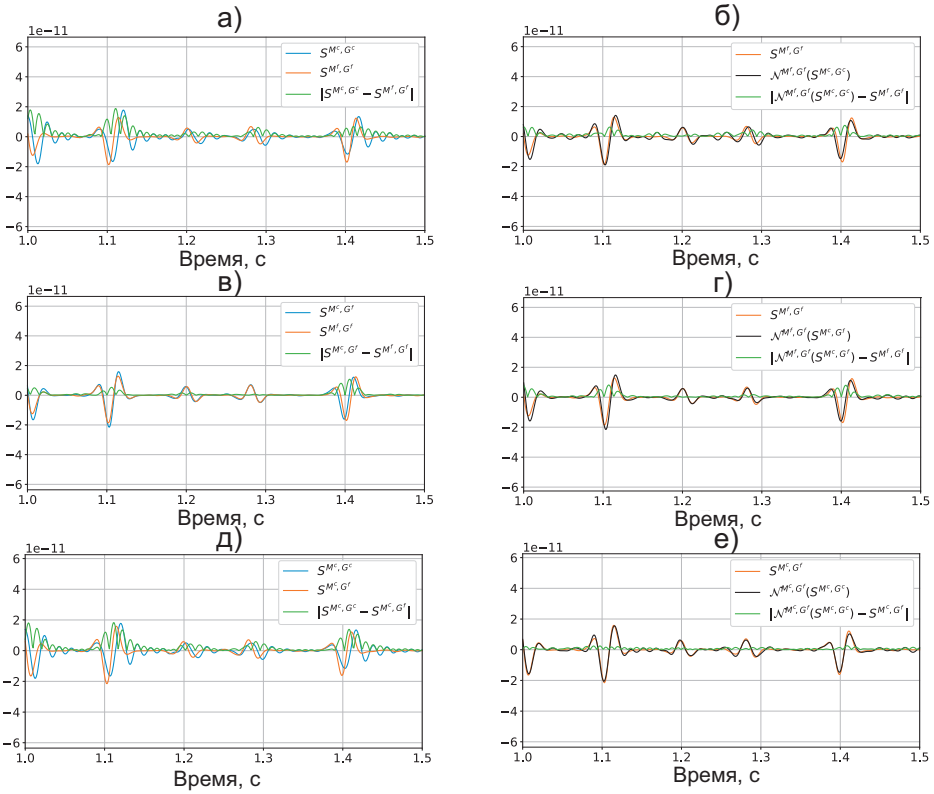

Рисунок 17 – Сейсмическая трасса для скоростной модели Марму-си по результатам численного моделирования (а, в, д) и по результатам применения нейронной сети NDM-net (б, г, е).

случаев: с использованием грубых сеток I^{M^c,G^c}, с использовани-ем мелких сеток I^{M^f,G^f} и с использованием грубой дискретиза-ции скоростной модели и мелкой расчётной сетки I^{M^c,G^f}. Из ана-лиза абсолютных разниц в значениях между сейсмограммами, а именно $dI[(M^c,G^c),(M^f,G^f)] = |I^{M^c,G^c} - I^{M^f,G^f}|$ (Рисунок 18 а), $dI[(M^c,G^f),(M^f,G^f)] = |I^{M^c,G^f} - I^{M^f,G^f}|$ (Рисунок 18 б), и $dI[(M^c,G^c),(M^c,G^f)] = |I^{M^c,G^c} - I^{M^c,G^f}|$ (Рисунок 18 д), а также между сейсмограммами после применения нейронной сети NDM-net, а именно

$d\hat{I}[(M^c,G^c),(M^f,G^f)] = |\mathcal{N}^{M^f,G^f}[I^{M^c,G^c}] - I^{M^c,G^c}|$ (Рисунок 18 б),

$d\hat{I}[(M^c,G^f),(M^f,G^f)] = |\mathcal{N}^{M^f,G^f}[I^{M^c,G^f}] - I^{M^c,G^f}|$ (Рисунок 18 г),

$d\hat{I}[(M^c, G^c), (M^c, G^f)] = |\mathcal{N}^{M^c,G^f}[I^{M^c,G^c}] - I^{M^c,G^f}|$ (Рисунок 18 е), следует, что величина численной ошибки коррелирует с численной ошибкой в сейсмограммах общего снимка.

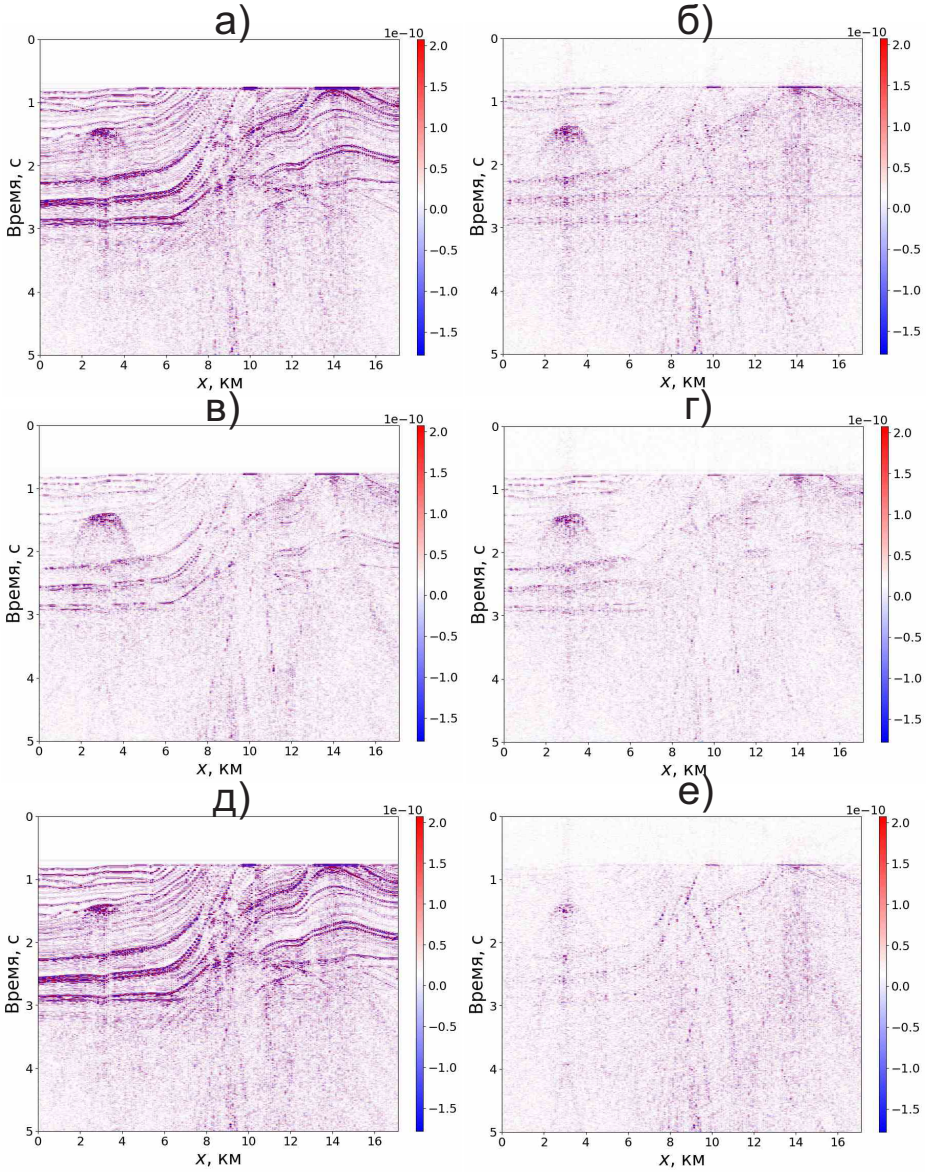

Рисунок 18 – Абсолютная разница значений сейсмограмм с нулевым удалением приёмников для скоростной модели Мармуси: $dI[(M^c, G^c), (M^f, G^f)]$ - (а), $dI[(M^c, G^f), (M^f, G^f)]$ - (б), и $dI[(M^c, G^c), (M^c, G^f)]$ - (в), $d\hat{I}[(M^c, G^c), (M^f, G^f)]$ - (г), $d\hat{I}[(M^c, G^f), (M^f, G^f)]$ - (д).

Значительный эффект использования нейронной сети NDM-net отмечается при применении к существенно загрязненным дан-

ным из-за численной дисперсии. Напротив, начальная численная ошибка из-за огрубления скоростной модели относительно мала, поэтому эффект от применения NDM-net гораздо слабее, если обрабатывается только соответствующая численная ошибка. В то же время, если сейсмограммы включают оба типа численных ошибок, при использовании нейронной сети NDM-net подавляются обе, без потери точности. Следовательно, применение нейронной сети NDM-net эффективно.

2.4. Применение алгоритма при сейсмическом мониторинге захоронения парниковых газов в породе-коллекторе

Применение технологии улавливания парниковых газов, известного как связывание углерода [Metz et al.,2005; Fu et al., 2022], – один из путей смягчения последствий изменений климата от антропогенного воздействия. Однако перенаправление CO_2, CH_2 и других газов в породу-ловушку требует изучения для выбора мест, скорости закачки, контроля повышения давления, оценки максимальной эффективности захоронения и обеспечения условий, чтобы закачка не привела к прорыву газа в породу-покрышку. Среди использования сейсморазведки и проведения моделирования двухфазной жидкости, специалистами выполняются моделирование распространения сейсмических волн [Arts et al.,2004; Chaswick et al., 2010].

В последние годы активно используются нейронные сети, которые обеспечивают высокий уровень точности решения назван-

ных задач при значительном сокращении времени решения и вычислительных затрат. Например, Wen G. с соавторами используют нейронный Фурье-оператор совместно с архитектурой нейронной сети U-net для моделирования потока двухфазной жидкости и газов [Wen et al., 2022]. Такой комбинированный подход позволяет значительно увеличить качество получаемых данных моделирования, чем при использовании одного лишь нейронного оператора. При этом исследователи доказывают, что обученная модель генерирует поле давления и распространение газонасыщения в 6×10^4 раз быстрее по сравнению с классическим методом моделирования потока жидкости. Исследователи Celaya A. и Arays-Polo M. предлагают использовать альтернативные методы, какие как гравитационное зондирование, в сочетании с решением прямой задачи сейсмики и нейронной сетью [Celaya, Arays-Polo, 2023]. Однако по словам самих авторов такой подход ограничен большим вычислительным затратам как и при формировании выборки данных для обучения, так при самом обучении. Нейронные сети, к тому же, используются при детектировании плюма парникового газа по сейсмическим изображениям [Li, Li, 2021; Sheng et al.,2023], для оптимизации выбора места захоронения парниковых газов [Santos et al., 2023; Gupta et al., 2023] по выделенным ключевым параметрам, таким как пористость, проницаемость и наличие структурных ловушек. Кроме того, важным направлением изучения является взаимодействие химических процессов с физическими в пористой среде. Например, Shukla с соавторами предлагают численную модель, которая учитывает химическое растворение пород под действием закаченного CO_2 [Shukla et al.,2023]. Их результаты показывают,

что локальные изменения минералогии могут существенно влиять на эффективность долгосрочного хранения.

Совместно с решением прямой задачи сейсмики нейронные сети также используются. Например, Li с соавторами используют полносвязную нейронную сеть для прогнозирования изменения параметров резервуара после захоронения CO_2 и сравнивают эффективность метода с эффективностью традиционных методов, а именно с инверсией полных волн [Li et al., 2021]. Однако, по мнению самых же авторов, возникает сложность применения реальных данных из-за требования к количеству и качеству выборки для обучения.

Итак, современные исследования демонстрируют большой потенциал применения нейронных сетей в задачах связывания углерода. Эти методы не только существенно ускоряют моделирование и анализ, но и позволяют решать задачи, которые ранее считались слишком сложными из-за нехватки вычислительных ресурсов или недостатка данных. Перспективы дальнейших исследований – разработка универсальных моделей для мониторинга и управления захоронением парниковых газов, использование реальных полевых данных при обучении нейронных сетей, а также расширение междисциплинарных подходов для учёта химических, физических и геологических факторов.

2.4.1. Постановка задачи

При решении задачи сейсмического мониторинга захоронения парниковых газов в породе - коллекторе применяется нейронная

сеть NDM-net к рассчитанным сейсмограммам исходя из условий, что изменения в сейсмических данных во время закачки CO_2 демонстрируют, как изменяются свойства коллектора [Ivandic et al., 2018] и что скоростные модели среды на каждом шаге мониторинга захоронения известны. При этом моделируется фильтрация двухфазной жидкости в пористой среде, т.е. решается система уравнений при выполнении закона сохранения массы и закона Дарси [Vasil'ev et al., 2017; Chen, Huan, Ma, 2006]:

$$\phi\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f(S)\vec{u}) = 0, \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad \vec{u} = -K\lambda(S)\nabla p, \tag{34}$$

где $\phi = \text{const}$ — пористость, $S = S_1$ — насыщенность газом, $\vec{u}$ — общая скорость двухфазной жидкости, K — абсолютная проницаемость пористой среды, p — давление, при этом фракционный поток определяется выражением

$$f(S) = \frac{\lambda_1(S)}{\lambda(S)}, \tag{35}$$

где $\lambda_1(S) = \frac{\kappa_1(S)}{\nu_1}, \lambda_2(S) = \frac{\kappa_2(S)}{\nu_2}, \lambda(S) = \lambda_1(S) + \lambda_2(S)$ —мобильность газа, воды и общая мобильность, соответственно. Относительная проницаемость и вязкость $j-$ой фазы обозначается как $\kappa_j(S)$ и ν_j, соответственно. Также выполняется условие, при котором всё пористое пространство заполнено:

$$S_1 + S_2 = 1, \tag{36}$$

где S_1 — насыщенность газа CO_2 в суперкритическом состоянии, S_2 — насыщенность воды.

При этом капилярное давление и ускорение свободного падения не учитываются. Относительные проницаемости выражаются эмпирически с использованием модели Корея [Corey, 1954]:

$$k_1 = k_1^{max} S_{eff}^{\beta}, \quad k_2 = k_2^{max}(1 - S_{eff})^{\gamma}, \tag{37}$$

и

$$S_{eff} = \frac{S - S_1^0}{1 - S_1^0 - S_2^0}. \tag{38}$$

Параметры k_{rj}^{max}, β, γ, и S_j^0 зависят от рассматриваемой двухфазной системы и окружающей среды.

Решается начально-краевая задача (34) в области k_{rj}^{max}, β, γ, and S_j^0 с условиями на границе:

$$\begin{aligned} &p|_{x=X_l} = p_l, && p|_{x=X_r} = p_r, \\ &\nabla p \cdot \vec{n}|_{z=Z_u} = 0, && \nabla p \cdot \vec{n}|_{z=Z_d} = 0, \\ &S|_{x=X_l} = S_l, && \nabla S \cdot \vec{n}|_{x=X_r} = 0, \\ &\nabla S \cdot \vec{n}|_{z=Z_u} = 0, && \nabla S \cdot \vec{n}|_{z=Z_d} = 0, \end{aligned} \tag{39}$$

и начальными условиями:

$$\vec{u}|_{t=0} = 0, \;\; S|_{t=0} = S_1^0. \tag{40}$$

Для численного моделирования фильтрации двухфазной жидкости в пористой среде используется явная схема по давлению и неявная схема по насыщенности (в англ. лит-ре IMPES – "implicit pressure-explicit saturation"). Время $t \in [0, T]$ дискретизируется как $0 = t^0 < t^1 < \ldots < t^N = T$. Для рассматриваемой IMPES схемы

для каждого $n = 0, 1, ..., N$ решается система уравнений:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\kappa\lambda(S^n)\nabla p^n) &= 0, \\ \vec{u}^n &= -\kappa\lambda(S^n)\nabla p^n, \\ \phi\frac{S^{n+1}-S^n}{\Delta t} &= \nabla \cdot (f(S^n)\vec{u}^n)\,. \end{aligned} \tag{41}$$

Для дискретизации по пространству вводится равномерная прямоугольная сетка (Рисунок 19) с шагами $h = h_x = h_z$, давление p и насыщенность S определяются в центрах ячеек, т.е. в координатах $x = x_i = ih_x$, and $z = z_j = jh_z$, в то время как компоненты скорости определяются на границах $(u_x)_{i+1/2,j} = u_x((i+1/2)h_x, jh_z)$, и $(u_z)_{i,j+1/2} = u_x(ih_x, (j+1/2)h_z)$.

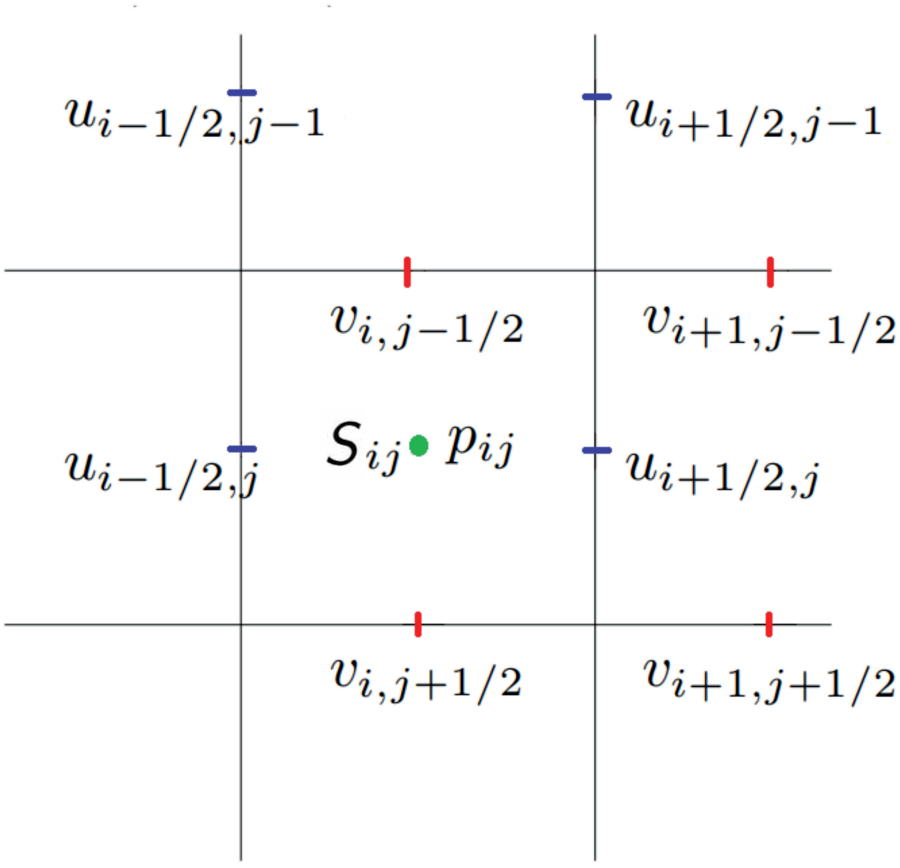

Рисунок 19 – Geometry of the unit cell of a diagram on staggered grid.

Уравнение Пуассона аппроксимируется с использованием схе-

мы второго порядка:

$$\begin{array}{c} -\frac{1}{h_x}\left[(\kappa\lambda(S^n)))_{i+1/2,j}\frac{p^n_{i+1,j}-p^n_{i,j}}{h_x} - (\kappa\lambda(S^n))_{i-1/2,j}\frac{p^n_{i,j}-p^n_{i-1,j}}{h_x}\right] \\ -\frac{1}{h_z}\left[(\kappa\lambda(S^n))_{i,j+1/2}\frac{p^n_{i,j+1}-p^n_{i,j}}{h_z} - (\kappa\lambda(S^n))_{i,j-1/2}\frac{p^n_{i,j}-p^n_{i,j-1}}{h_z}\right] = 0. \end{array} \tag{42}$$

где коэффициенты $(\kappa\lambda(S^n)))_{i+1/2,j}$ выводятся через гармоническое усреднение:

$$(\kappa\lambda(S^n))_{i+1/2,j} = 2\left(\frac{1}{(\kappa\lambda(S^n))_{i+1,j}} + \frac{1}{(\kappa\lambda(S^n))_{i,j}}\right)^{-1}. \tag{43}$$

Такое усреднение сохраняет второй порядок сходимости в случае разрывных коэффициентов [Самарский, 1977]. Для решения уравнения Пуассона (42) используется метод сопряженных градиентов со спектральным предобуславливателем [Khachkova et al., 2021].

Далее вычисляются компоненты скорости по следующим формулам:

$$\begin{array}{l} (u_x)^n_{i+1/2,j} = -\frac{1}{h_x}(\kappa\lambda(S^n))_{i+1/2,j}(p^n_{i+1,j} - p^n_{i,j}), \\ (u_z)^n_{i,j+1/2} = -\frac{1}{h_z}(\kappa\lambda(S^n))_{i,j+1/2}(p^n_{i,j+1} - p^n_{i,j}). \end{array} \tag{44}$$

Для решения третьего уравнения системы (41) используетя противопоточная схема:

$$\phi\frac{S^{n+1}_{i,j} - S^n_{i,j}}{\tau} = -\frac{F^x_{i+1/2,j} - F^x_{i-1/2,j}}{h_x} - \frac{F^z_{i,j+1/2} - F^z_{i,j-1/2}}{h_z}, \tag{45}$$

где

$$F^x_{i+1/2,j} = \begin{cases} (u_x)^n_{i+1/2,j} f(S^n_{i,j}), & (u_x)^n_{i+1/2,j} > 0, \\ (u_x)^n_{i+1/2,j} f(S^n_{i+1,j}), & (u_x)^n_{i+1/2,j} \le 0, \end{cases} \tag{46}$$

$$F^z_{i,j+1/2} = \begin{cases} (u_z)^n_{i,j+1/2} f(S^n_{i,j}), & (u_z)^n_{i,j+1/2} > 0, \\ (u_z)^n_{i,j+1/2} f(S^n_{i,j+1}), & (u_z)^n_{i,j+1/2} \le 0, \end{cases} \tag{47}$$

Для текущего этапа исследования применимости разработанного алгоритма к задаче сейсмического мониторинга захоронения парниковых газов использование противопоточной схемы оказывается достаточно. Однако если необходимо будет повысить точность вычислений используются схемы TVD [Yee, 1987] и ENO(WENO) [Harten et al., 1987; Liu, Osher, Chan, 1994]

Для определения изменения плотности и сейсмических атрибутов при фильтрации газа используется приближение Гассмана [Gassman, 1951; Mavko, Mukerji, Dvorkin, 2009; Murphy, Schwartz, Hornby, 1991]:

$$\begin{gathered}\rho_{sat} = S((1-\phi)\rho_0 + \phi\rho_1) + (1-S)((1-\phi)\rho_0 + \phi\rho_2), \\ \rho_{sat}V_p^2 = K_{sat} + K_{dry} + 4/3\mu_0, \\ \rho_{sat}V_S^2 = \mu_0,\end{gathered} \tag{48}$$

где ρ_{sat} — плотность насыщенной породы, V_p и V_s это скорости продольных и поперечных волн, соответственно, $K_{dry} = K_0(1-\phi)^{3/(1-\phi)}$ — объёмный модуль упругости сухой породы, $\mu = \mu_{dry} = \mu_{sat}$ — модуль сдвига, где μ_{dry} — эффективный модуль сдвига сухой породы, μ_{dry} — эффективный модуль сдвига насыщенной породы, и

$$K_{sat} = \frac{(1 - K_{dry}/K_0)^2}{\phi/K_{fl} + (1-\phi)/K_0 - K_{dry}/K_0^2}, \tag{49}$$

где $K_{fl} = (\frac{S}{K_1} + \frac{1-S}{K_2})^{-1}$ — эффективный модуль упругости вмещающей породы, K_0 — модуль упругости минерального материала.

Основываясь на решении задачи фильтрации в поровом пространстве (34) в моменты времени $T_0, T_1, ..., T_{N_m}$ пересчитывают-

ся скоростные модели $M_1, ..., M_{N_m}$, где $M^i = \{V_p^i, V_s^i \rho^i\}$ где $V_p^i = V_p(T_i)$, $V_s^i = V_s(T_i)$, и $\rho^i = \rho(T_i)$, а N_m — последняя рассматриваемая стадия мониторинга (Рисунок 20). Вычисленные скоростные модели используются для дальнейшего расчёта волновых сейсмических полей, соответствующих различным стадиям замещения флюида.

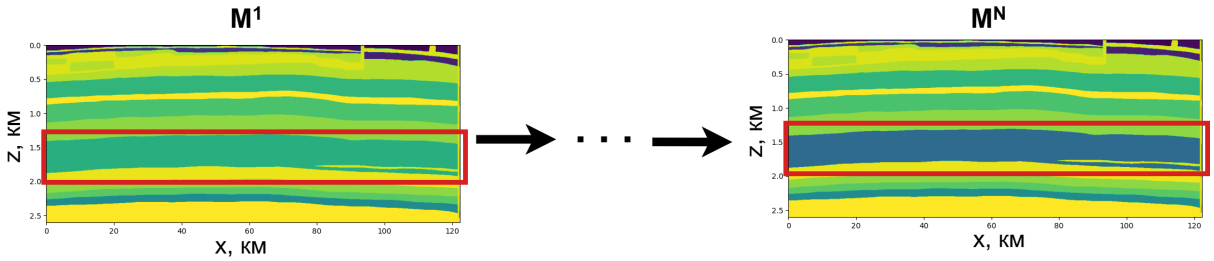

Рисунок 20 – Изменение значений скорости сейсмических волн V_p в одном из слоёв скоростной модели Ванавара

Нейронная сеть NDM-net [Gadylshin et al., 2022; Gondyul et al., 2023; Gadylshin et al., 2023; Гондюл, Лисица, Вишневский, 2025] применяется для подавления обеих типов численных ошибок: ошибка при возмущении скоростной модели среды и численная дисперсия. При этом сейсмограммы рассчитываются с использованием грубой расчётной сетки для снижения затрат. Применяется тот же алгоритм, что и в разделе .

В качестве архитектуры нейронной сети NDM-net используется архитектура pix2pix (сокращение от «pixels to pixel» – пиксель в пиксель) [Isola et al., 2016], которая состоит из двух архитектур: генератора и дискриминатора. Генератор представляет собой модифицированный U-net [Ronneberger, Fischer, Brox, 2015] (Раздел 2.1.3). Дискриминатор - это простой классификатор, основанный на операциях свертки [Isola et al., 2016].

Для аппроксимации оператора G, который отобража-

ет сейсмограмму $\boldsymbol{u}^i_{h_1}(t, x_o, x^k_s)$ в расхождение сейсмограмм $d\boldsymbol{u}^i_{h_2,h_1}(t, x_o, x^k_s) = \boldsymbol{u}^i_{h_2}(t, x_o, x^k_s) - \boldsymbol{u}^i_{h_1}(t, x_o, x^k_s)$ и оператора D (дискриминатор), который отличает сейсмограммы от сгенерированных данных, используется нейронная сеть NDM-net на основе архитектуры pix2pix [Isola et al., 2016] путем минимизации функции потерь для выбора параметров Θ:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(\Theta) = \arg\min_G \max_D E_{k\in D_t}[\log D(G(\boldsymbol{u}_{h_2}(t, x_o, x^k_s), \Theta)) \\ + \log(1 - D(d\boldsymbol{u}^i_{h_2,h_1}(t, x_o, x^k_s))) \\ +\lambda(\left\|d\boldsymbol{u}^i_{h_2,h_1}(t, x_o, x^k_s) - G(\boldsymbol{u}_{h_2}(t, x_o, x^k_s), \Theta)\right\|_1)],\end{aligned} \tag{50}$$

где $\Theta = \{W, \boldsymbol{b}\}$ — параметры сети для G, включающие весовую матрицу W и смещение $\boldsymbol{b}$, $\mathbb{E}_{k\in D_t}$ — среднее по обучающему набору данных, $||\cdot||_1$ — норма L_1.

После этого сейсмограмма с меньшей долей численной дисперсии восстанавливается по следующей формуле:

$$\boldsymbol{u}^i_G(t, x_o, x^k_s) = \boldsymbol{u}^i_{h_1}(t, x_o, x^k_s) + G(\boldsymbol{u}^i_{h_1}(t, x_o, x^k_s)). \tag{51}$$

Скорости обучения при аппроксимации операторов G и D составляют 10^{-4} и 10^{-7} соответственно, коэффициент $\lambda = 10000$. Для обучения нейронной сети используется адаптивный метод оптимизации Adam, который обеспечивает устойчивую и быструю сходимость. Набор обучающих данных формируется с использованием равномерно распределенных источников и составляет 20% от общего числа источников.

2.4.2. Численные эксперименты

Для численных экспериментов используется часть синтетической скоростной модели Ванавара (Раздел 2.3.2), и её размер составляет 12,5 км – в горизонтальном направлении и 2.6 км – в вертикальном. При этом численно моделируется фильтрация CO_2 в суперкритическом состоянии в одном слое (Рисунок 21). Абсолютная проницаемость слоя составляет $K = 10^{-13}$ м^2, в то время как абсолютная проницаемость остальных слоев составляет $K = 10^{-15}$ м^2. Используется расчетная сетка с шагами $h_x = 50$ м и $h_z = 5$ м, плотность и вязкость сверхкритического CO_2 составляют $\rho_{CO_2} = 800$ кг/м^3 и $\mu_{CO_2} = 0.7 \times 10^{-4}$ Па $\cdot$ с, воды $\rho_w = 1000$ кг/м^3 и $\mu_w = 2 \times 10^{-3}$ Па $\cdot$ с соответственно.

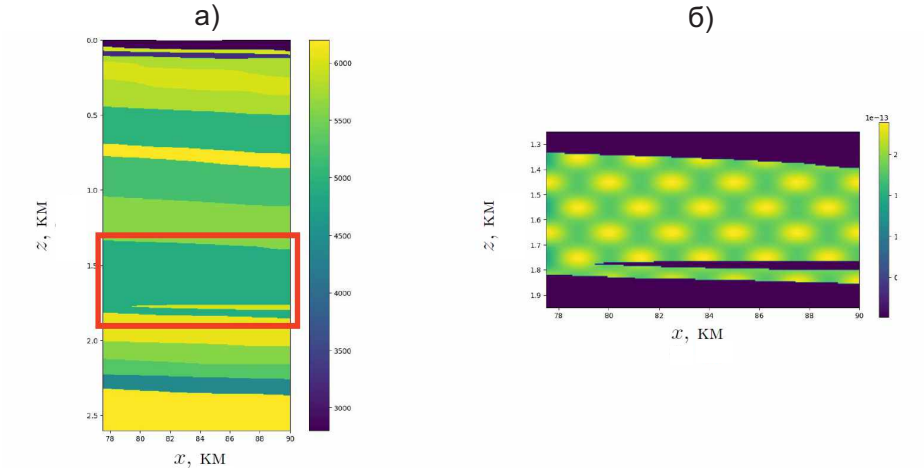

Рисунок 21 – Часть скоростной модели Ванавара: а) значения скорости продольной волны V_p у части скоростной модели Ванавара (слой, в котором моделируется фильтрация двухфазной жидкости, выделен красным), б) Значения абсолютной проницаемости K в слое.

Используя решение задачи (34) вычисляются сейсмические атрибуты для шести значений времени (Рисунок 22).

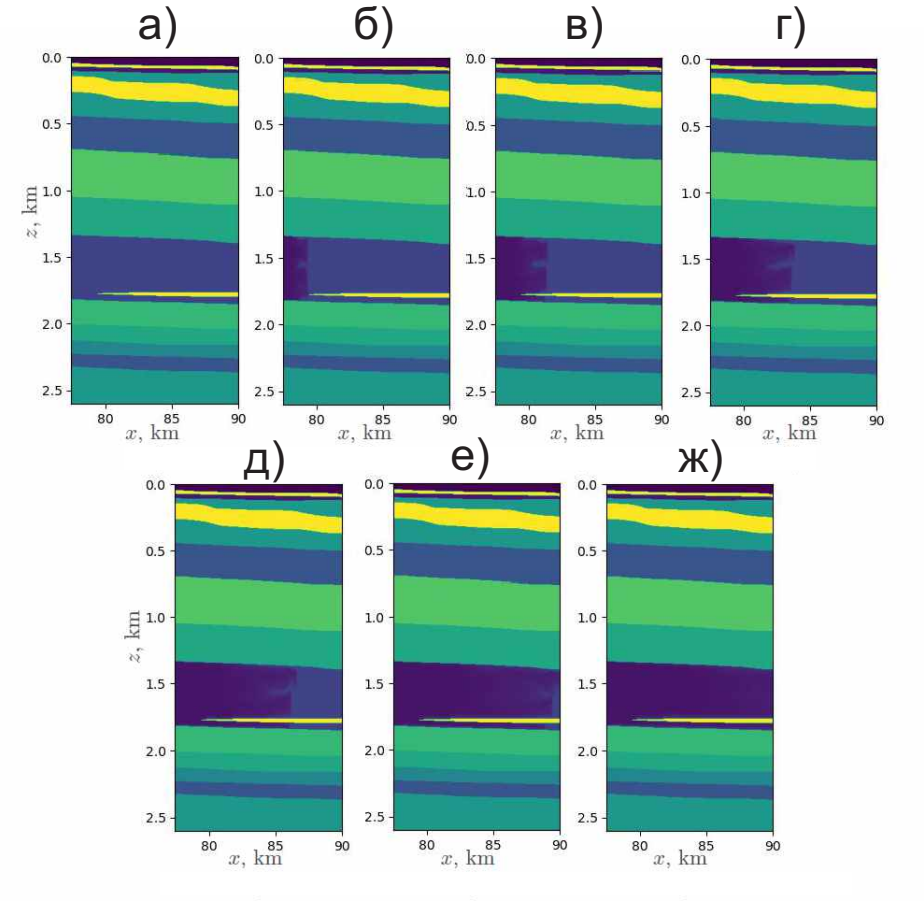

Рисунок 22 – Значение плотности при фильтрации CO_2 в суперкритическом состоянии для значений времени а) 0 ч, б) 110 ч, в) 220 ч, г) 330 ч, д) 440 ч, е) 550 ч, ж) 660 ч.

Одним из ключевых этапов предлагаемого алгоритма применения нейронной сети NDM-net в задаче сейсмического мониторинга является аппроксимация оператора G и оператора D. Нейронная сеть обучается в течении 300 эпох до достижения значений единицы для G и нуля для D (Рисунок 23). При это время обучения на видеокарте NVIDIA GeForce RTX 3090 с 8 ГБ оперативной памяти с использованием процессора Intel Core с 256 ГБ оперативной памяти составляет 60 минут.

Пример сейсмограммы, полученной с использованием нейронной сети NDM-net, демонстрирует, что она визуально соответствует

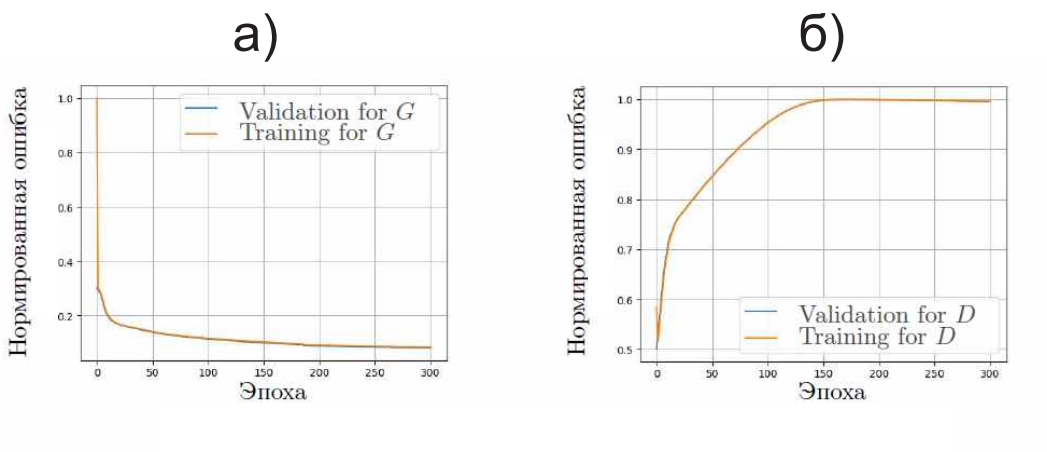

Рисунок 23 – Зависимость среднего номированного значения точности и ошибки при обучении и валидации нейронной сети NDM-net для аппроксимации операторов G_1, D_1

численному решению на мелкой расчётной сетке, а численная дисперсия существенно уменьшается (Рисунок 24).

Для оценки качества результатов применения нейронной сети используется ошибка в терминах L_2 –нормы:

$$\begin{aligned} &\varepsilon(\boldsymbol{u}^i_{h_1}(t, x_o, x^k_s), \boldsymbol{u}^1_{h_1}(t, x_o, x^k_s)) = \\ &= \frac{||\boldsymbol{u}^i_{h_1}(t,x_o,x^k_s) - \boldsymbol{u}^1_{h_1}(t,x_o,x^k_s)||_2}{||\boldsymbol{u}^1_{h_1}(t,x_o,x^k_s)||_2} \times 100\%. \end{aligned} \tag{52}$$

Такая ошибка используется также при расчете начального расхождения между решениями на мелкой и грубой расчетных сетках, ее обозначают $\varepsilon^i_{\text{init}}$.

Средняя ошибка для каждого источника и результирующая ошибка после применения нейронной сети (Рисунок 25) показывают, что численная дисперсия в среднем уменьшилась в три раза со 119% до 41% в терминах L_2 –нормы для трех рассматриваемых этапов захоронения газа (M^1, M^3, M^7).

В результате численного моделирования распространения сейсмических волн и получения сейсмограмм лишь для части источ-

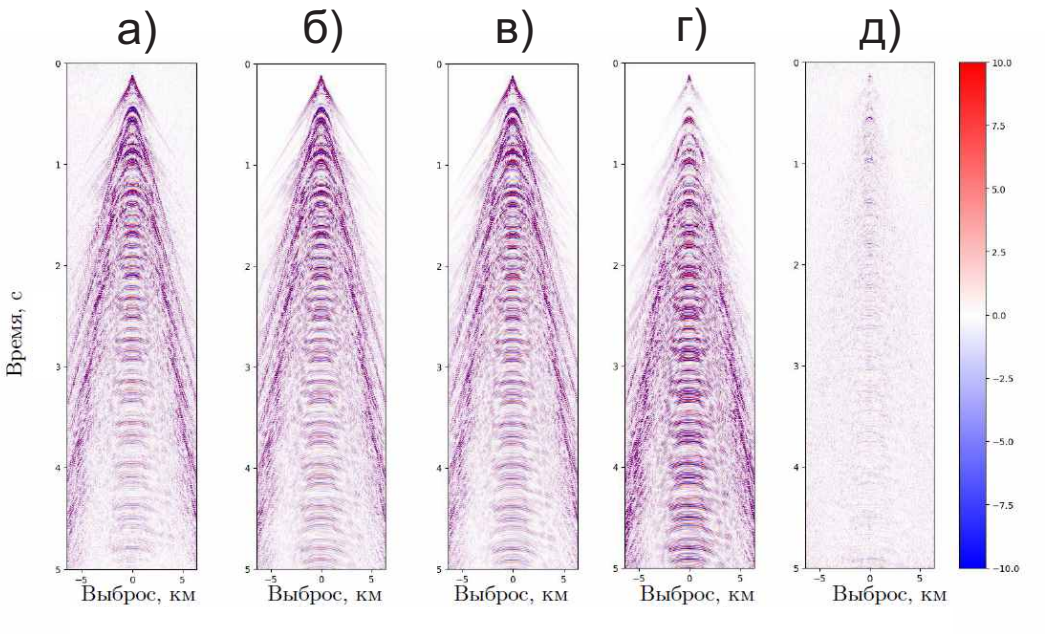

Рисунок 24 – Z-компонента вектора скорости смещений на сейсмограмме после применения нейронной сети NDM-net $\boldsymbol{u}_G^7(t, x_o, x_s^k)$ для скоростной модели Ванавара M^7, источника с положением $x_s = 2$ км а) после применения нейронной сети NDM-net, б) на мелкой расчётной сетке, в) на грубой расчётной сетке; абсолютная разница z-компоненты вектора скорости смещений г) между решениями на мелкой и грубой расчётных сетках, д) между решением на мелкой расчётной сетке и результатом применения нейронной сети NDM-net.

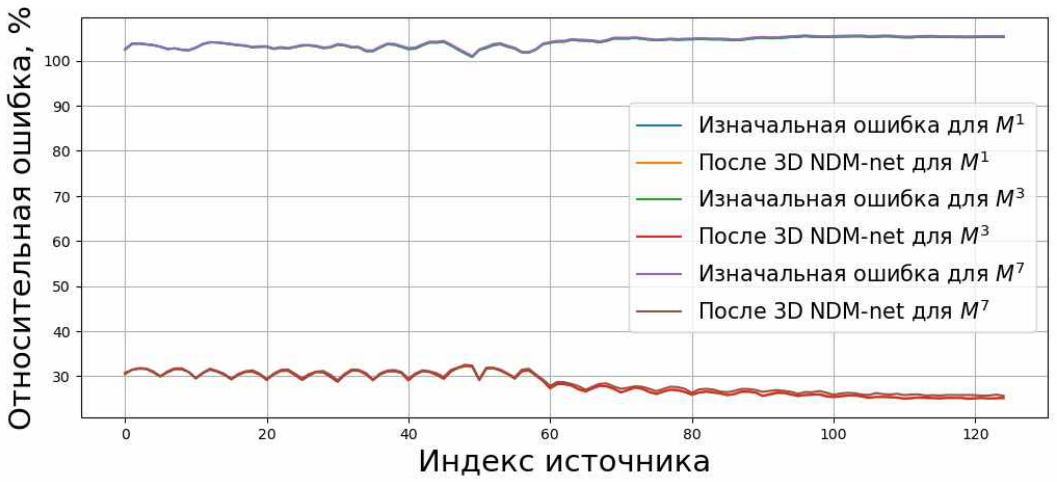

Рисунок 25 – Относительная ошибка между сейсмограммой по результатам расчёта на мелкой сетке и расчёта на грубой сетке и относительная ошибка между сейсмограммой по результатам расчёта на грубой сетке и сейсмограммой по результатам применения нейронной сети NDM-net для скоростных моделей M^1, M^3, M^7.

ников, а также обучения нейронной сети для подавления численной дисперсии значительно сокращается расчётное время. Так, для вычисления всех сейсмограмм с использованием мелкой расчётной сетки для каждой скоростной модели M^i потребуется примерно 5250 мин. В то же время, вычисление всех сейсмограмм с использованием грубой сетки, формирование обучающей выборки, обучение и применение нейронной сети NDM-net заняло бы приблизительно 1985 мин, что означает 3-кратное ускорение решения системы уравнений динамической теории упругости.

2.5. Применение алгоритма при глубинной миграции

Для оценки применимости разработанного и реализованного алгоритма ускорения моделирования волновых сейсмических полей в задаче построения сейсмических изображений сотрудницей ОО "ПетроТрейс"В.А. Дубровиной была применена глубинная миграция до суммирования к наборам синтетических данных, полученных с использованием скоростной модели BP. Для построения изображений используется алгоритм Кирхгофа. Алгоритм работает так, что значения амплитуд сейсмических волн суммируются вдоль дифракционной гиперболы. Далее полученное значение помещается в точку, соответствующую вершине гиперболы. Так получаются сейсмические данные с учетом пространственного сноса в глубинном масштабе, что позволяет более правильно определить месторасположение отражающих границ.

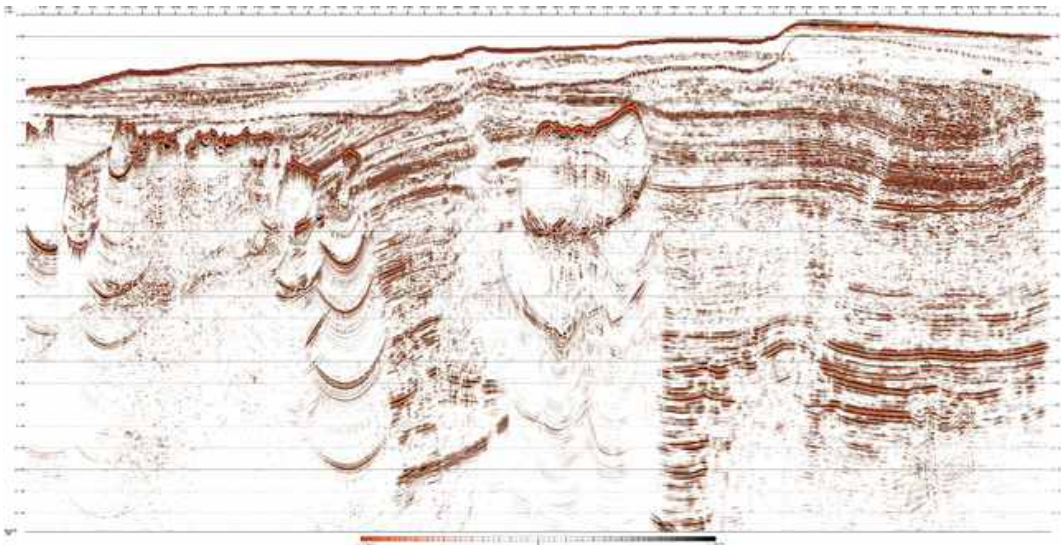

Рисунок 26 – Глубинный сейсмический разрез, построенный по данным скоростной модели BP, рассчитанным на грубой сетке.

Для расчёта глубинной миграции для скоростной модели BP выполняется реконструкция волнового фронта в качестве метода расчёта времён пробега волн. Параметры расчёта: диаметр аперту-ры – 6 км, диапазон выходных удалений – 0-3200 м с шагом 25 м, максимальная частота – 90 Гц, максимальная глубина – 12 км.

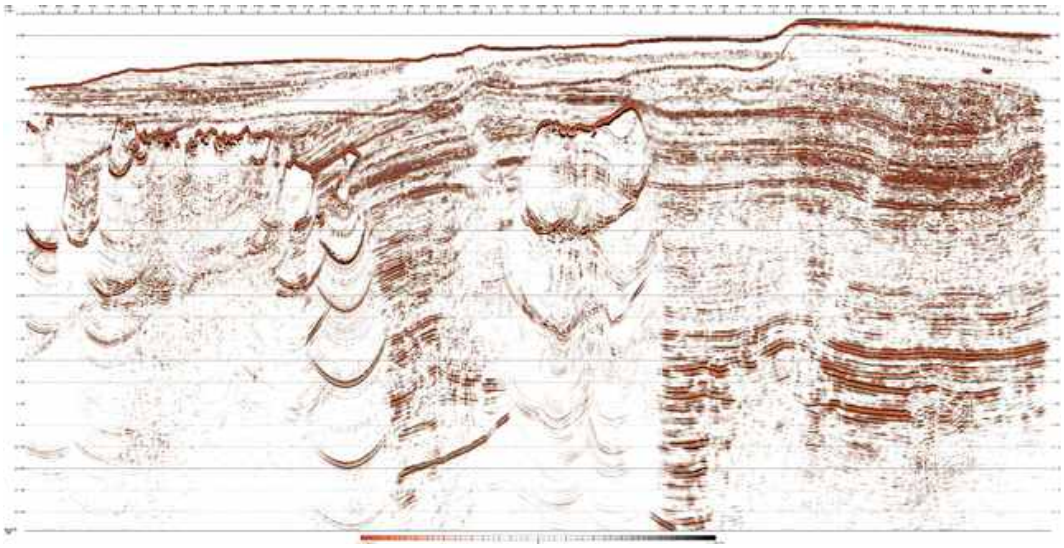

Рисунок 27 – Глубинный сейсмический разрез, построенный по "эталонным"данным скоростной модели BP, рассчи-танным на мелкой сетке.

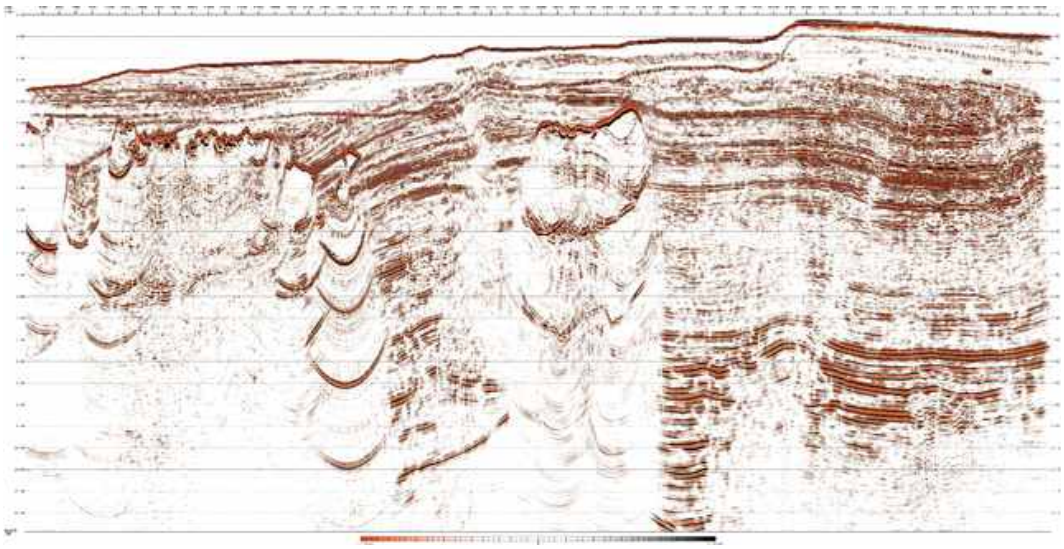

Рисунок 28 – Глубинный сейсмический разрез, построенный по данным скоростной модели BP, полученным после применения NDM-net.

На глубинном разрезе по сейсмическим данным, полученным с использованием грубой расчётной сетке, видны выраженные осцилляции в основном ниже сейсмических событий (Рисунок 26). Деформирование волнового пакета вызвано численной дисперсии в этом случае. Однако некоторые сейсмические события в правой части и в центральной части разреза между интрузивными телами соответствуют в приемлемой точности с сейсмическими событиями в "эталонном"глубинном разрезе, полученном с использованием мелкой расчётной сетки (Рисунок 27). Такой эффект выражен и в глубинном разрезе по сейсмическим данным, полученным после применения NDM-net (Рисунок 28).

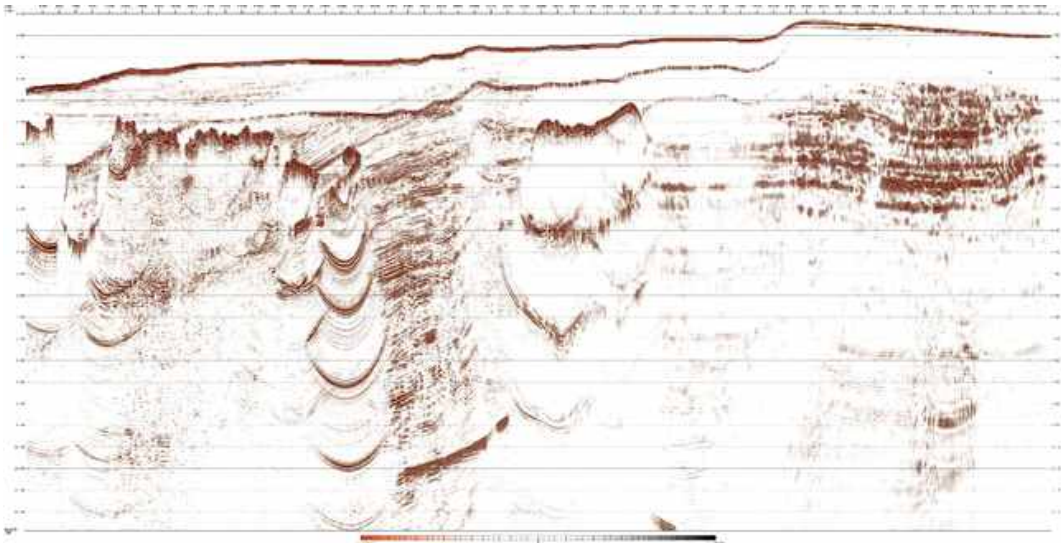

Рисунок 29 – Разность глубинных сейсмических разрезов, построенный по данным скоростной модели BP, рассчитанным на мелкой и грубой сетках.

Использование загрублённых сейсмических данных для глубинной миграции приводит к высокой ошибке, которая проявляется практически во всех сейсмических событиях (Рисунок 29). Применение же разработанного алгоритма позволяет существенно подавить такую ошибку при ускорении вычислительного времени

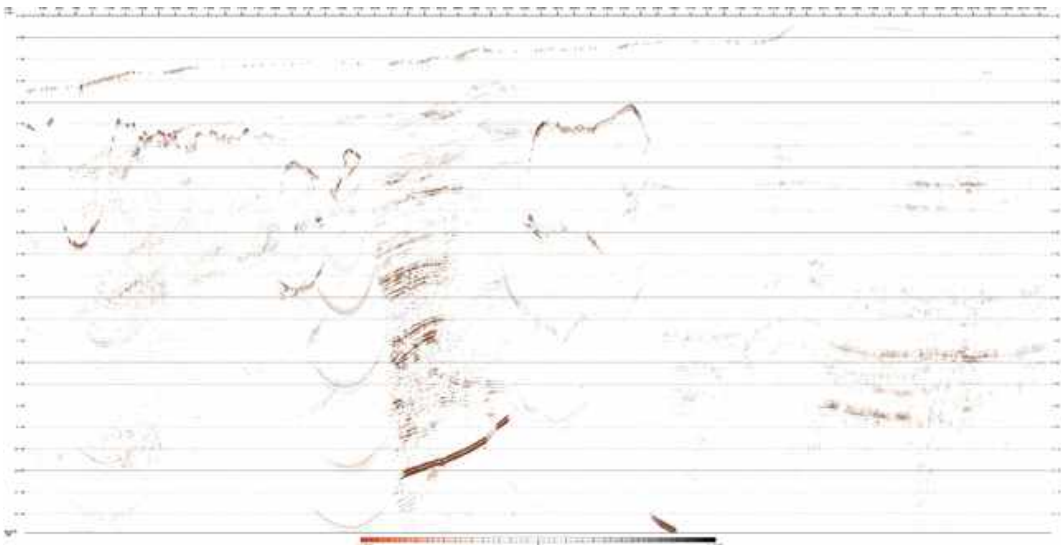

Рисунок 30 – Разность глубинных сейсмических разрезов, построенный по данным скоростной модели BP, рассчитанным на мелкой сетке, и данным после коррекции NDM-net.

(Рисунок 30). Видно, что малоглубинные события не содержат численной ошибки после применения разработанного алгоритма, при этом она нарастает с глубиной, что проявляется на резкоконтрастных границах. Это связано с тем, что нейронная сеть NDM-net корректирует в первую очередь наиболее значимую по величине часть ошибки, т.е. сдвиг фазы. Также нарастает погрешность в самих исходных данных с глубиной в силу большего пути распространения волны. Следует отметить, что синфазность, связанного с глубоким горизонтом в центральной части модели, после применения разработанного алгоритма нарушилась.

Глава 3
Стратегии формирования выборки сейсмограмм для обучения нейронной сети NDM-net

3.1. Постановка задачи

Важный этап в разработке алгоритма – формирование репрезентативного набора сейсмограмм минимизацией расстояния Хаусдорфа между выборкой для обучения и набором всех сейсмограмм [Gadylshin et al., 2022; Gadylshin et al., 2023; Gondyul et al., 2023; Гондюл и др., 2024]. Такая выборка формируется с использованием кластерного анализа и учётом свойств самих сейсмограмм и скоростных моделей среды, при этом рассматриваются три метрики: расхождение в значениях между сейсмограммами [Gadylshin et al., 2023], разница скоростей и плотности в скоростных моделях [Gondyul et al., 2023], а также евклидово расстояние между источниками [Gadylshin et al., 2022]. Также, выполняется глобальный анализ чувствительности («Global sensitivity analysis» – в англоязычной литературе) [Sobol', 2001; Saltelli et al., 2008] ошибки сейсмограмм после применения нейронной сети NDM-net к трём введённым метрикам для получения новой метрики в виде их линейной комбинации. И такая метрика уже используется при формировании оптимизированной выборки, учитывающей все три параметра, т.е. репрезентативного набора сейсмограмм [Гондюл и др.,

2024].

3.2. Используемые метрики при формировании выборки для обучения

Расстояние между источниками как метрика

Самый простой способ сформировать выборку данных для обучения - это использовать геометрию системы сбора данных в виде расстояния между источниками:

$$d_d^{ij} = |x_s^i - x_s^i|, \tag{53}$$

при условии, что они располагаются на одной глубине $z_s = 0$. Поскольку используется система наблюдения стандартная, то расстояние между источниками представляется в виде метрики:

$$d_d^{ij} = |x_s^i - x_s^i| = |i - j|d, \tag{54}$$

где d - расстояние между двумя источниками.

Расхождение между сейсмограммами в качестве метрики

При другом способе формирования выборки данных используются свойства самих сейсмограмм. Так как сейсмограммы соотносятся с фиксированным положением источника и являются функцией двух переменных $\vec{u}(t, x_o, x_s^j)$, то метрика вводится исходя из нормы L_2:

$$d_s^{ij} = d_s(\vec{u}(t, x_o, x_s^j), \vec{u}(t, x_o, x_s^i)) = 2\frac{\|\vec{u}(t, x_o, x_s^j) - \vec{u}(t, x_o, x_s^i)\|_2}{\|\vec{u}(t, x_o, x_s^j)\|_2 + \|\vec{u}(t, x_o, x_s^i)\|_2}, \tag{55}$$

где

$$\|\vec{u}(t, x_o, x_s^i)\|_2^2 = \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^{N_o} \left[u_x^2(t_n, x_o^m, x_s^i) + u_z^2(t_n, x_o^m, x_s^j) \right], \qquad (56)$$

где N_t — количество отсчётов по времени и N_o — количество трасс в сейсмограмме.

Разница в скоростных моделях как третья метрика

Третья метрика основывается на разнице значений скоростей и плотности в скоростных моделях среды, исходя из принципа сейсмического моделирования: фиксированное положение источника волнового поля моделируется в подобласти, которая располагается под источником по центру. Следовательно, для каждой правой части можно использовать модель
$M(x, z, x_s^j) \subset M(x, z)$, где $M(x, z)$ — полная скоростная модель.

Тогда расстояние между моделями можно представить в виде метрики

$$\begin{aligned} d_m^{ij} &= d_m(M(x, z, x_s^j), M(x, z, x_s^i)) = \\ &= 2\frac{\|M(x,z,x_s^j) - M(x,z,x_s^i)\|_2}{\|M(x,z,x_s^j)\|_2 + \|M(x,z,x_s^i)\|_2}, \end{aligned} \qquad (57)$$

где

$$\|M(x, z, x_s^i)\|_2^2 = \int_0^Z \int_{x_s^i - L_x}^{x_s^i + L_x} \left[v_p^2(x, z) + v_s^2(x, z) \right] dxdz. \qquad (58)$$

Скорость продольной волны v_p и скорость поперечной волны v_s – параметры скоростной модели, которые зависят от коэффициентов Ламе как $v_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ и $v_p = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$.

Так, три введённых метрики используются в алгоритме фор-

мирования обучающей выборки в качестве альтернативы традиционным способам формирования, такими, как случайный выбор данных.

3.3. Использование кластерного анализа и введённых метрик для формирования обучающей выборки данных

Согласно выше приведенным метрикам, расстояние между отдельным объектом и набором объектов можно представить в виде формулы:

$$D_l(q^j, B) = \min_{q^i \in B} d_l(q^j, q^i), \tag{59}$$

где q^j и q^i могут быть либо позициями источников, либо сейсмограммами, либо скоростными моделями среды, тогда как B - это набор таких объектов, а d_l, $l \in \{d, s, m\}$ – метрика в соответствующем пространстве.

Далее вводится расстояние Хаусдорфа между двумя наборами данных для кластерного анализа:

$$\delta_l(A, B) = \max \left\{ \max_{q^j \in P} D_l(q^j, B), \max_{q^i \in B} D_l(A, q^i) \right\}, \tag{60}$$

где A и B - это два множества в рассматриваемом пространстве. Такая метрика вычислят наибольшее из возможных расстояний от каждой точки одного множества до ближайшей к ней точки второго множества.

Для формирования выборки данных для обучения используется кластерный анализ: набор данных разбивается на непересе-

кающиеся подмножества (кластеры) так, чтобы каждый кластер состоял из объектов, близких по метрике d_l. Для этого вычисляется расстояния между подмножеством всего набора сейсмограмм и другими подмножествами, поэтому расстояние Хаусдорфа представляется в виде метрики:

$$\delta_l(B_0 \subset B, B) = \max_{q^i \in B} D_l(B_0, q^i) = \max_{q^i \in B} \min_{q^j \in B_0} d_l^{ij}(q^j, q^i). \qquad (61)$$

Порядок действия исполнителя при формировании выборки данных с использованием кластерного анализа и одной из метрик включает следующие шаги:

1. Задаётся размер выборки для обучения, например, $5 - 10\%$ от общего количества сейсмограмм, т.е. количество кластеров N_{cl}.

2. При использовании алгоритма иерархической кластеризации [Merwe, Engelbrecht, 2003] (Алгоритм 1) похожие сейсмограммы в рассматриваемой метрике собираются в кластеры. Таким образом, строится система вложенных разбиений.

3. Затем, берутся центральные сейсмограммы из каждого кластера для формирования выборки J^{train} для обучения нейронной сети NDM-net.

Итак, разработаны стратегии формирования обучающей выборки данных для нейронной сети NDM-net с использованием свойств сейсмограмм и скоростной модели среды. Такие выборки позволяет значительно увеличить эффективность работы нейронной сети NDM-net по сравнению с использованием классических выборок, таких как случайная выборка.

Алгоритм 1 – Алгоритм иерархической кластеризации для формирования выборки данных для обучения при сохранении Хаусдорфовой метрики

$J^{train} \leftarrow \varnothing$
$N_{cl} \leftarrow 0$
$j_0 \leftarrow 1$
$j \leftarrow j_0$
while $j < N_s$ **do**
  while $\min_{k=j_0 \ldots j} \max_{l=j_0 \ldots j} d^{kl} \leq H_0$ **do**
    $j \leftarrow j + 1$
  end while
  $j \leftarrow j - 1$
  $J_{N_{cl}+1} \leftarrow \arg\min_{k=j_0 \ldots j} \max_{l=j_0 \ldots j} d^{kl}$
  $J^{train} \leftarrow J^{train} \cup J_{N_{cl}+1.}$
  $N_{cl} \leftarrow N_{cl} + 1$
  $j_0 \leftarrow j + 1$
end while

3.4. Статистический анализ точности результатов применения нейронной сети NDM-net при использовании трёх введённых метрик

Для статистического анализа точности результатов применения нейронной сети NDM-net формируются выборки сейсмограмм случайным образом: при фиксированном количестве сейсмограмм N_{tr} в выборке данных для обучения используется биномиальное распределение для генерации некоррелированной последовательности единиц и нулей, которые принимают свои значения с вероятностями $p = N_{tr}/N_s$ и $1 - p$, соответственно, где N_s — общее количество сейсмограмм. Затем, набор индексов J^{train} включает в себя только те индексы из последовательности $\{1, ..., N_s\}$, которые в построенной последовательности случайных величин соответствуют единицы. Так, с использованием каждой случайно сгенерированной выборки J^{train} обучается нейронная сеть NDM-net и затем рассчитывается средняя ошибка $\tilde{\varepsilon}$ между набо-

ром всех сейсмограмм, рассчитанных на мелкой расчётной сетке, и набором сейсмограмм после применения нейронной сети NDM-net:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} d_s \left(G \left[\vec{u}_{h_2}(t, x_o, x_s^i) \right], \vec{u}_{h_1}(t, x_o, x_s^i) \right). \qquad (62)$$

Таким образом, для каждой сформированной выборки для обучения J^{train} можно оценить четыре параметра: размер выборки $N_{tr} = \dim\{J^{train}\}$ и три Хаусдорфовых расстояния $\delta_d, \delta_s, \delta_m$. В то время как набор сейсмограмм после применения нейронной сети NDM-net можно характеризовать одним параметром – средней ошибкой $\tilde{\varepsilon}$.

Чтобы выяснить какая из трёх введённых метрик $\delta_d, \delta_s, \delta_m$ больше всего влияет на точность результатов применения обученной нейронной сети NDM-net, выполняется статистических анализ, а именно глобальный анализ чувствительности [Sobol', 2001; Saltelli et al., 2008], который используется для снижения размерности задачи и упрощения математической модели, оценки устойчивости и влияния входных параметров на выходные результаты математической модели [Reuter, Liebscher, 2008; Morio, 2011]. Так, этот метод используется и для изучения нейронных сетей [Yeung et al., 2012]. Для анализа и оценки чувствительности с использованием индексов Соболя используется метод Монте-Карло [Sobol', 2001; Sobol' et al., 2007].

Пусть выходные результаты применения нейронной сети NDM-net представляются в виде функции средней ошибки $\tilde{\varepsilon} = f(\vec{y})$, где $\vec{y} = (N_{tr}, \delta_d, \delta_s, \delta_m)^T$, а индексы Соболя первого порядка в

виде отношения

$$S_i = \frac{Var(\mathbb{E}_{\vec{y}\sim i}(\tilde{\varepsilon}|y_i))}{Var(\tilde{\varepsilon})}, \tag{63}$$

где $\mathbb{E}$ — математическое ожидание, Var — дисперсия, y_i — i-й параметр, $\vec{y} \sim i$ — набор всех параметров, за исключением y_i. Индексы Соболя первого порядка характеризуют изменчивость рассматриваемой функции по одному входному параметру y_i, т.е. оценивают значимость каждого параметра.

Поскольку самым значительным параметром является размер выборки данных для обучения [Гондюл и др.,2024], то необходим глобальный анализ чувствительности для фиксированного размера выборки $N_{tr} = const$, так как такой анализ выполняется только для некоррелированных параметров, когда сумма индексов Соболя составляет единицу, а не превышает её [Saltelli, Tarantola, 2020]. В таком случае корреляция между параметрами определяется методом главных компонент. Известно, что математически анализ главных компонент включает спектральное разложение ковариационной матрицы, которое совпадает с сингулярным разложением матрицы исходных данных, а собственные векторы ковариационной матрицы статистически независимы, поэтому ковариационная матрица в новых переменных – диагональная. В трехмерном же пространстве параметров $\delta_d, \delta_s, \delta_m$ отношение между исходными параметрами и собственными векторами представляется в виде корреляционной матрицы. Поэтому для обеих рассмотренных моделей генерируется серия выборок данных для обучения $\{J_k^{train}\}_{k=1}^{N_{rand}}$, где N_{rand} — количество случайных выборок для различных значений N_{tr}. После этого для каждого фиксированного N_{tr} остаётся

построить ковариационные матрицы $\mathbf{\Sigma}^{N_{tr}}$ с элементами, которые определяются выражением

$$\mathbf{\Sigma}_{ij}^{N_{tr}} = \mathrm{Cov}(\delta_i^{N_{tr}}, \delta_j^{N_{tr}}) = \mathbb{E}[(\delta_i^{N_{tr}} - \mathbb{E}[\delta_i^{N_{tr}}])(\delta_j^{N_{tr}} - \mathbb{E}[\delta_j^{N_{tr}})]], \qquad (64)$$

где $\mathbb{E}$ — среднее значение, δ_i и δ_j — любые из трех расстояний δ_d, δ_s или δ_m, а N_{tr} — количество сейсмограмм в рассматриваемых выборок данных.

Далее выполняется разложение по собственным значениям ковариационных матриц и строится график собственных векторов в координатном пространстве $\delta_d, \delta_s, \delta_m$.

После анализа корреляции параметров ошибка нейронной сети для фиксированного размера выборки данных для обучения представляется в виде линейной комбинации введённых метрик:

$$\tilde{\varepsilon}_{N_{tr}}(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = \tilde{\varepsilon}_0 + \alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2 + \alpha_3\delta_3 + o(\delta_1, \delta_2, \delta_3), \qquad (65)$$

где $\tilde{\varepsilon}_{N_{tr}}$ — средняя ошибка результатов нейронной сети NDM-net для фиксированного размера выборки данных $N_{tr} = const$, $(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = (\delta_d, \delta_s, \delta_m)$.

В таком случае минимизация функции ошибки эквивалентна минимизации линейной комбинации:

$$l(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = q(\alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2 + \alpha_3\delta_3) \to \min, \qquad (66)$$

где q — любое положительное действительное число.

При этом коэффициенты Соболя для линейной функции соот-

ветствуют следующему выражению [Соболь, 2010]:

$$S_{\delta_i} = \frac{Var(\mathbb{E}_{\vec{\delta}\sim i}(\tilde{\varepsilon}|\delta_i))}{Var(\tilde{\varepsilon})} = \frac{(\alpha_i L_{\delta_i})^2}{\sum_j (\alpha_j L_{\delta_j})^2}, \tag{67}$$

где L_{δ_i} — разброс переменной δ_i. Так как безразмерные переменные изменяются в интервале $[0, 1]$, то коэффициенты Соболя первого порядка могут рассматриваться как усредненные первые производные линейной функции в квадрате в рассматриваемом гиперкубе $[0, 1]^3$.

Далее с использованием регрессионного анализа рассчитываются коэффициенты α_1, α_2 и α_3, а затем нормируются и усредняются:

$$\widetilde{\alpha_i} = \frac{1}{N_{rand}} \sum_{k=0}^{N_{rand}} \frac{\sqrt{S_i^k \sum_j (\alpha_j^k L_j^k)^2}}{L_i^k} \tag{68}$$

где N_{rand} — количество случайных обучающих выборок.

Итак, с использованием линейной комбинации трёх введённых метрик (65) можно сформировать оптимизированную обучающую выборку данных, учитывающую такие свойства, как расстояние между источниками, разницу сейсмограмм и расхождение скоростных моделей для каждого источника.

3.4.1. Верификация алгоритма с использованием линейной комбинации трёх введённых метрик для формирования обучающей выборки данных для нейронной сети NDM-net

Верификация алгоритма выполняется на двух скоростных моделях: скоростной модели Ванавара [Gadylshin et al., 2024] и скоростной модели BP [Billette, Brandsberg-Dahl, 2005]. Глобальный анализ чувствительности выполняется для обеих скоростных моделей при размерах выборок для обучения $5-10\%$ от общего количества сейсмограмм. Оценки коэффициентов линейной части функции ошибки (Таблица 6) показывают, что самое существенное влияние имеют метрики δ_d и δ_m.

Таблица 6 – Оценки коэффициентов линейной части ошибки

	S_{δ_d}	S_{δ_s}	S_{δ_m}	$\widetilde{\alpha}_d$	$\widetilde{\alpha}_s$	$\widetilde{\alpha}_m$
Модель BP	0.499	0.0442	0.4565	0.815	0.089	0.095
Модель Ванавара	0.489	0.139	0.3714	0.812	0.112	0.075

Для обеих моделей рассматривается линейная комбинация метрик со средними коэффициентами (Таблица 6), т.е. выполняется минимизация:

$$0.813\delta_d + 0.1\delta_s + 0.085\delta_m \to \min\,. \tag{69}$$

В соответствии с линейной комбинацией рассчитываются матрицы расстояний, затем для формирования выборки данных для обучения с фиксированным размером выборки N_{tr} и минимальным расстоянием δ_l используется иерархическая кластеризация [Merwe, Engelbrecht, 2003] (Алгоритм 1). Далее на полученных выборках

данных обучается нейронная сеть NDM-net. Вот так оптимизируется выборка данных для обучения с индексами $D^{H_{new}}$. При этом формируются три типа выборки с набором индексов D^{H_d}, D^{H_s}, D^{H_m}: соответствующие выборкам на основе расстояния между положениями источников d_d, между сейсмограммами d_s, между скоростными моделями d_m.

По формуле (62) вычисляются ошибки $\tilde{\varepsilon}$ для оптимизированных наборов данных в зависимости от N_s для скоростной модели BP (Рисунок 31) и скоростной модели Ванавара (Рисунок 32), и ошибки, соответствующие минимизации только одного расстояния, а также для случайным образом сгенерированных наборов данных, индексы которых обозначаются как D^{random}. Средняя ошибка после применения нейронной сети NDM-net ко всему набору сейсмограмм в зависимости от размера выборки данных для обучения для обеих скоростных моделей имеет меньшее значение при использовании оптимизированной выборки по сравнению с использованием других типов выборок.

Для верификации и оценки структурных особенностей полученных сейсмограмм также используется отношение сигнал/шум SNR [Hore, Ziou, 2010], которое рассчитывается по формуле

$$SNR = 20\log_{10}\left(\frac{||\vec{u}_{h_1}(t, x_o, x_i^s) - G\left[\vec{u}_{h_2}(t, x_o, x_i^s)\right]||_2}{||\vec{u}_{h_1}(t, x_o, x_i^s)||_2}\right). \qquad (70)$$

Среднее значение отношения SNR между полным сгенерированным нейронной сетью набором данных и набором данных, рассчитанных с использованием мелкой сетки совместно с расположением источников рассчитывается для различных типов выборки для обучения

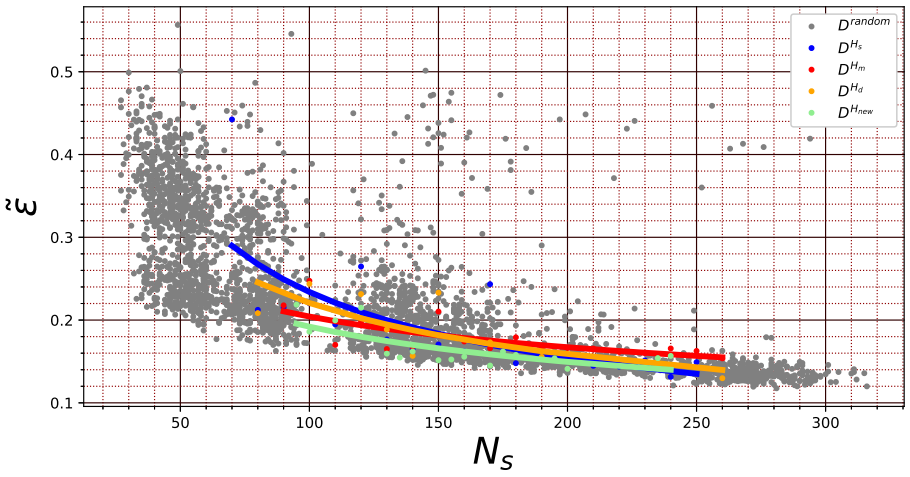

Рисунок 31 – Экспоненциальная зависимость средней ошибки после применения нейронной сети NDM-net ко всему набору данных от размера выборки данных для обучения для различных типов выборки для модели BP

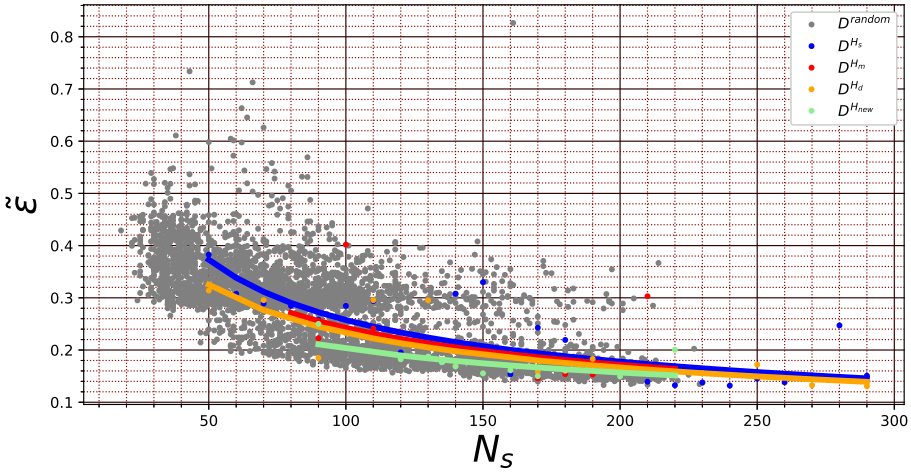

Рисунок 32 – Экспоненциальная зависимость средней ошибки после применения нейронной сети NDM–net ко всему набору данных от размера выборки данных для обучения для различных типов выборки для модели Ванавара

с использованием скоростной модели BP (Рисунок 33) и скоростной модели Ванавара (Рисунок 34). Для модели Ванавара и модели BP размеры выборки составляют $N = 100$ и $N = 110$ соответствен-

но. Для модели BP после оптимизации выборки данных отношение SNR уменьшается в 9 раз, а при использовании других выборок данных отношение SNR уменьшается в 7 раз. Для модели Ванавара применение новой выборки данных уменьшает отношение SNR в 3 раза, на других наборах данных – почти в 2,5 раза.

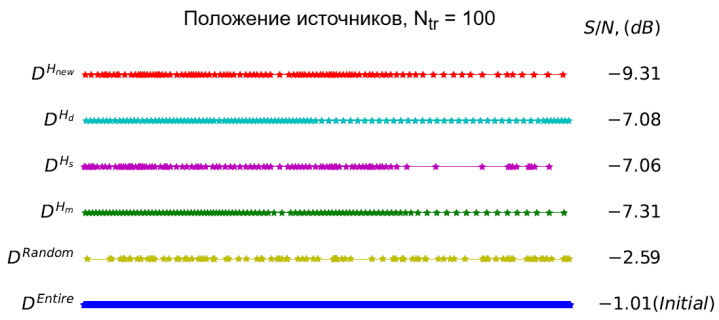

Рисунок 33 – Распределение источников на поверхности для каждого типа выборок для обучения и соответствующее им результирующее отношение сигнал/шум SNR для модели BP

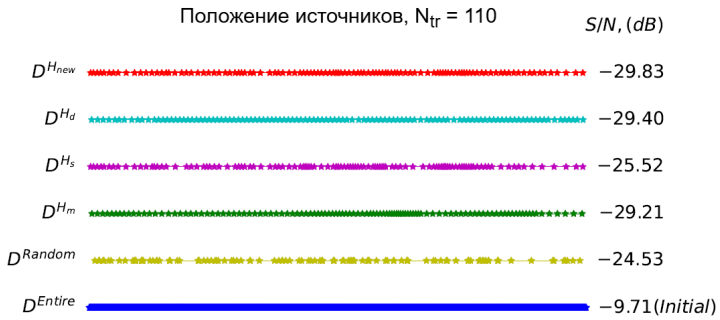

Рисунок 34 – Распределение источников в пространстве для каждого типа обучающих выборок и соответствующее им результирующее отношение сигнал/шум для модели Ванавары

Таким образом, строится выборка данных для обучения, минимизирующая среднюю ошибку результатов применения нейронной

сети NDM-net. Оптимизированная выборка формируется с использованием линейной комбинации трёх введённых метрик: расстояние между источниками, разница в значениях между сейсмограммами и расхождение скоростных моделей среды. Кроме того, разработана стратегия формирования выборки данных с использованием иерархической кластеризации. Все типы выборок при обучении показывают существенное увеличение качества результатов применения нейронной сети NDM-net.

Заключение

Разработан алгоритм моделирования сейсмических волновых полей в двумерной изотропной среде с использованием конечно-разностной схемы на сдвинутых сетках и нейронной сети NDM-net для подавления численных ошибок. Разработанный алгоритм обладает рядом существенных преимуществ по сравнению с традиционными и известными алгоритмами.

Во-первых, значительно повышается эффективность моделирования сейсмических волновых полей за счёт использования нейронной сети NDM-net к рассчитанным заранее сейсмограммам на грубой расчётной сетке. При этом, точность результатов применения разработанного алгоритма не уступает точности моделирования сейсмических волновых полей на мелкой расчётной сетке. Численные ошибки подавляются в 3-5 раз, а ускорение вычислений до 6 раз, что подтверждает практическую применимость алгоритма в задачах сейсморазведки.

Во-вторых, обеспечивается эффективность применения нейронной сети NDM-net за счёт использования быстрого преобразования Фурье для перевода сейсмограмм в частотную область и значительного сокращения их размера, не теряя при этом основной сигнал.

В-третьих, при применении разработанного алгоритма в задаче сейсмического мониторинга показано существенное ускорение

(до 6 раз) по сравнению с сейсмическим мониторингом с использованием мелкой расчётной сетки.

Оптимизация обучающей выборки с использованием введённых метрик (расстояния между источниками, расхождение в значениях сейсмограмм, расхождение в скоростных моделях) и кластерного анализа позволяет повысить её репрезентативность и сократить размер без потери точности результатов применения нейронной сети NDM-net, что особенно важно при обучении нейронных сетей на ограниченных наборах данных. Глобальный анализ чувствительности подтвердил значимость метрики как расстояния между источниками, а объединение всех трёх метрик в одну позволяло добиться наилучших результатов.

Таким образом, разработанный алгоритм моделирования и методы оптимизации обучающей выборки создают надёжную основу для дальнейшего совершенствования численных подходов к решению задач геофизики, в том числе при переходе к трёхмерным моделям и более сложным условиям среды, а также для интеграции глубокого обучения в сейсмическое моделирование на новом уровне.

Литература

1. Полноволновое моделирование в сейсморазведке на основе цифровой геологической модели с использованием метода спектральных элементов / Ю. П. Ампилов [и др.] // Геология и геофизика. – 2024. – Т. 65, № 10. – С. 1435-1445.

2. Вишневский Д. М. Численное моделирование распространения сейсмических волн в средах с вязкоупругими включениями / Д .М. Вишневский, В. В. Лисица, Г. В. Решетова // Вычислительные методы и программирование. – 2013. – Т. 14. – С. 155–165.

3. Годунов С.К. Разностные схемы / С.К. Годунов, В.С. Рябенький. — М. : Наука, 1973. — С. 440.

4. Гондюл Е.А. Свидетельство о регистрации программы ЭВМ FFT-NDMnet / Е.А. Гондюл // Св-во о регистр. прогр. 2024611513; RU; №2024612481, заявл. 29.01.2024, опубл. 01.02.2024.

5. Оптимизация тренировочного набора данных для подавляющей численную дисперсию нейронной сети NDM-net / Е. А. Гондюл и др. // Вычислительные методы и программирование. – 2024. – Т. 25, № 2. – С. 155-174.

6. Нейросетевой подход к подавлению численной ошибки в данных сейсмического моделирования, обусловленной погрешностью в

скоростной модели / Е. А. Гондюл [и др.] // Геофизика. – 2024. – Т. 3. – С. 4-11.

7. Вишневский Д.М. Комбинирование конечно-разностных схем для моделирования волновых процессов в упругих средах, содержащих анизотропные слои / Д.М. Вишневский, В.В. Лисица, В.А. Чеверда // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2021. – Т. 15, №2. – С. 175-181.

8. Гольдин С.В. Сейсмические волны в анизотропных средах / С.В. Гольдин. — Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2008. — 372 с.

9. Ландау Л.Д. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М. : Наука, 1987. — 246 с.

10. Лисица В. В. Дисперсионный анализ разрывного метода Галеркина в применении к уравнениям динамической теории упругости / В. В. Лисица // Вычислительные методы и программирование. – 2015. – Т. 16. – С. 387–406.

11. Лебедев В.И. Разностные аналоги ортогональных разложений, основных диф- ференциальных операторов для некоторых краевых задач математической физики. / В.И. Лебедев // Журнал вычислительной математики и матема- тической физики.—1964. – Т. 4, № 3. – С. 449–465.

12. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А.Самарский. — М. : Наука, 1977. — С. 657.

13. Соболь И. М. О критериях глобальной чувствительности, использующих производную / И. М. Соболь // Матем. моделирование. – 2010. – Т.22, № 12. – С. 137-143.

14. A Closer Look at Memorization in Deep Networks / D. Arpit [et al.] // arXiv. –2017. – URL: https://arxiv.org/abs/1706.05394

15. Backus G.E. Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering / G.E. Backus // Journal of Geophysical Research. – 1962. – Vol. 67, no. 11. – P. 4427–4440.

16. Becache E. A new family of mixed finite elements for the linear elastodynamic / E. Becache, P. Joly, C. Tsogka // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2002. – Vol. 39. – P. 2109–2132.

17. Berenger J.P. A huygens subgridding for the fdtd method / J.P. Berenger // IEEE533 Trans. Antenn. Propag. –2006. – Vol.54. – P.3797–3804.

18. Belousov D. Mimetic finite differences for boundaries misaligned with grid nodes /D. Belousov, V. Lisitsa // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2023. – Vol. 428. – P. 115185.

19. Billette, F.J. The 2004 BP Velocity Benchmark / F. J. Billette, S. Brandsberg-Dahl // Conference: 67th EAGE Conference & Exhibition. – 2005.

20. Attenuation mechanisms in fractured fluid-saturated porous rocks: a numerical modelling study / Caspari E. [et al.] // Geophysical Prospecting. – 2019. – Vol. 67, no. 4. – P.935–955.

21. Celaya A. Joint inversion of time-lapse surface gravity and seismic data for monitoring of 3d co2 plumes via deep learning / A. Celaya, M. Araya-Polo // arXiv. – 2023.

22. Chen J.-B. A 27-point scheme for a 3D frequency-domain scalar wave equation based on an average-derivative method / J.-B. Chen // Geophysical Prospecting. – 2014. – Vol. 62, no. 2. – P. 258-277

23. Chung E.T. A staggered discontinuous Galerkin method for the simulation of seismic waves with surface topography / E. T. Chung, C. Y. Lam, J. Qian // Geophysics. – 2015. – Vol. 80, no.4. – P. T119-T135.

24. Cybenko G. V. Approximation by Superpositions of a Sigmoidal function / G. V. Cybenko // Mathematics of Control Signals and Systems. – 1989. – Vol. 2, no. 4. – P. 303—314.

25. Dzianisau S., Khandaq M. F., Lee D. Impact of Training Dataset Reduction on the Prediction Accuracy of Nuclear Design Parameters using Convolutional Neural Network / S. Dzianisau, M. F. Khandaq, D. Lee // Transactions of the Korean Nuclear Society Virtual spring Meeting. – 2021. –

26. An hp-adaptive discontinuous Galerkin finite-element method for 3-D elastic wave modelling / V. Etienne [et al.] // Geophysical Journal International. – 2010.– Vol. 183. – P. 941–962.

27. Everaert D., Potts C. GIO: Gradient Information Optimization for Training Dataset Selection / D. Everaert, C. Potts // arXiv. – 2023.

28. Research progress on CO2 capture and utilization technology / Fu L. [et al.] // Journal of CO2 Utilization. – Vol. 66. – 2022. – P. 102260.

29. Numerical dispersion mitigation neural network for seismic modeling / K. Gadylshin [et al.] // Geophysics. – 2022. – Vol. 87. – P. T237–T249.

30. Mitigation of numerical dispersion in seismic data in spectral domain with neural networks / K. Gadylshin, E. Gondyul [et al.] // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. – 2024. – Vol. 187.

31. SBP–SAT finite difference discretization of acoustic wave equations on staggered block-wise uniform grids / L. Gao [et al.] // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2019. – Vol. 348. – P. 421-444.

32. Numerical dispersion mitigation neural network with velocity model correction / E. Gondyul [et al.] // Computers and Geosciences. – 2025. – Vol. 196.

33. Goodfellow I. J. Generative Adversarial Networks / I. J. Goodfellow [et al.] // Advances in Neural Information Processing Systems. – 2014. – Vol. 3.

34. Subcell-resolution finite-difference modelling of seismic waves in Biot and JKD poroelastic media / D. Gregor [et al.] // Geophysical Journal International. – 2020. – Vol. 224, no. 9.

35. Seismic waves in medium with poroelastic/elastic interfaces: a two-dimensional P-SV finite-difference modelling / D. gregor [et al.] //

Geophysical Journal International. – 2021. – Vol. 228, no. 1. – P. 551-588.

36. Seismic Noise Suppression Method Based on Wave-Unet and Attention Mechanism / Guo M. [et al.] // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. – 2024. – Vol. 62. – P. 1-12.

37. He J., Zhang J., Yao Z. Determining the optimal coefficients of the explicit finite-difference scheme using the Remez exchange algorithm / J. He, J. Zhang, Z. Yao // Geophysics. – 2019. – Vol. 84, no. 3. – P. S137- S147.

38. Hennenfent G., Herrmann F. J. Simply denoise: Wavefield reconstruction via jittered undersampling / G. Hennenfen, F. J. Herrmann // Geophysics. – 2008. – Vol. 73, no.3. – P. V19–V28.

39. Horé A. Image Quality Metrics: PSNR vs. SSIM / A. Horé, D. Ziou // 2010 20th International Conference on Pattern Recognition (Istanbul, Turkey). – 2010. – P. 2366-2369.

40. Ioffe S. Batch normalization: Accelerating deep network training by reducing internal covariate shift / S. Ioffe, C. Szegedy // Proceedings of the 32nd International Conference on International Conference on Machine Learning. – 2015. – Vol. 37. – P.448–456.

41. Monitoring co2 saturation using time-lapse amplitude versus offset analysis of 3d seismic data from the ketzin co2 storage pilot site, germany / M. Ivandic [et al.] // Geophysical Prospecting. – 2018. – Vol. 66, no. 8. – P. 1568–1585.

42. Image-to-image translation with conditional adversarial networks / P. Isola [et al.] // arXiv. – 2016.

43. Kaur H. Overcoming numerical dispersion of finite-difference wave extrapolation using deep learning / H. Kaur, S. Fomel, N. Pham // SEG Technical Program Expanded Abstracts. – 2019. – P. 2318-2322.

44. Koene E. Removing numerical dispersion artifacts from reverse time migration and full-waveform inversion / E. Koene, J. Robertsson // SEG Technical Program Expanded Abstracts. – 2017. – P. 4143-4147.

45. Komatitsch D. The Spectral-Element Method in Seismology / D. Komatitsch, S. Tsuboi, J. Tromp // Seismic Earth: Array Analysis of Broadband Seismograms. – 2005. – Vol. 157. – P. 205-227.

46. Local time-space mesh refinement for simulation of elastic wave propagation in multiscale media / V. Kostin [et al.] // Journal of Computational Physics. – 2015. – Vol. 281. – P. 669–689.

47. An orthorhombic representation of a heterogeneous medium for the finite-difference modelling of seismic wave propagation / J. Kristek [et al.] // Geophysical Journal International. – 2017. – Vol. 208, no. 2. – P. 1250-1264.

48. A discrete representation of a heterogeneous viscoelastic medium for the finite-difference modelling of seismic wave propagation / J. Kristek [et al.] // Geophysical Journal International. – 2019. – Vol. 217, no. 3. – P. 2021-2034.

49. Kingma D. Adam: A Method for Stochastic Optimization / D. Kingma, J. Ba // arXiv. – 2014.

50. Li B., Li Y. E. Neural network-based CO2 interpretation from 4D sleipner seismic images / B. Li, Y.E. Li // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. – 2021. - Vol.126.

51. Deep learning for characterizing CO2 migration in time-lapse seismic images / H. Sheng [et al.] // Fuel. – 2023. – Vol. 336. – P. 126806.

52. Levander A. R. Fourth-order finite-difference p-sv seismograms / A. R. Levander // Geophysics. – 1988. – Vol. 53, no. 11, P. 1425–1436.

53. Lian C. Research on Seismic Noise Attenuation Method Based on Wavelet Transform and f-x-VMD / C. Lian, W. Chen // IEEE Access. – 2025. – Vol. 13. – P. 33544-33554.

54. Lisitsa V. Lebedev scheme for the numerical simulation of wave propagation in 3D anisotropic elasticity / V. Lisitsa, D. Vishnevskiy // Geophysical Prospecting. – 2010. – Vol. 58, no. 4. – P.619–635

55. Lisitsa V. Numerical simulation of seismic waves in models with anisotropic formations: coupling Virieux and Lebedev finite-difference schemes / V. Lisitsa, V. Tcheverda, D. Vishnevsky // Computational Geosciences. – 2012. – Vol. 16, no. 4. – P.1135–1152.

56. Lisitsa V. Combination of the discontinuous Galerkin method with finite differences for simulation of seismic wave propagation / V. Lisitsa, V. Tcheverda, C. Botter // Journal of Computational Physics. — 2016. — Vol. 311. — P. 142–157.

57. Lisitsa V. On the interface error analysis for finite difference wave simulation / V. Lisitsa, O. Podgornova, V. Tcheverda // Computational Geosciences. – 2010. – Vol. 14, no. 4. – P. 769-778.

58. Liu Y. Optimal staggered-grid finite-difference schemes based on least-squares for wave equation modelling / Y. Liu // Geophysical Journal International. – 2014. – Vol. 197, no. 2. – P. 1033-1047.

59. Liu Y., Sen M. Acoustic VTI modeling with a time-space domain dispersion-relation-based finite-difference scheme / Y. Liu, M. Sen // Geophysics. – 2010. - Vol. 75, no. 3. – P. 5077-5095.

60. Martin G.S. Marmousi2: An elastic upgrade for marmousi / G. S. Martin, R. Wiley, K. J. Marfurt // The Leading Edge. – 2006. – Vol. 25, no. 2. – P. 156–166.

61. Merwe D. W. Data clustering using particle swarm optimization / D. W. Merwe, A. P. Engelbrecht // The 2003 Congress on Evolutionary Computation. – 2003. – Vol. 01, no. 1. – P. 215–220.

62. IPCC Special Report on Carbon Dioxide Capture and Storage / Metz B. [et al.] // Cambridge University Press. – United Kingdom and New York: Cambridge, 2005. – 442 pp.

63. Local time stepping with the discontinuous Galerkin method for wave propagation in 3D heterogeneous media / S. Minisini [et al.] // Geophysics. – 2013. – Vol. 78, no. 3. – P. T67-T77.

64. Mittet R. Second-order time integration of the wave equation with dispersion correction procedures / R. Mittet // Geophysics. – 2019. – Vol.84, no. 4. – P. T221- T235.

65. 3D Heterogeneous Staggered-Grid Finite-Differece Modeling of Seismic Motion with Volume Harmonic and Arithmetic Averagigng of Elastic Moduli and Densities / Moczo P. [et al.] // Bulletin of the Seismological Society of America. – 2002. – Vol. 92, no. 8. – P. 3042-3066.

66. On accuracy of the finite-difference and finite-element schemes with respect to p-wave to s-wave speed ratio / P. Moczo [et al.] // Geophysical Journal International. – 2010. – Vol. 182, no. 1. – P. 493–510.

67. A discrete representation of material heterogeneity for the finite-difference modelling of seismic wave propagation in a poroelastic medium / Moczo P. [et al.] // Geophysical Journal International. – 2018. – Vol. 216, no. 2. – P. 1072-1099.

68. Morio J. Global and local sensitivity analysis methods for a physical system / J. Morio // European Journal of Physics. – 2011. – Vol. 32, no. 6. – P. 1577.

69. Moczo P. The finite-difference modelling of earthquake motion: Waves and Ruptures / P. Moczo, J. Kristek, M. Galis // Cambridge University Press. – 2014. – P. 365

70. Material Interface in the Finite-Difference Modeling: A Fundamental View / P. Moczo [et al.] // Bulletin of the Seismological Society of America. – 2022. – Vol. 113, no. 11.

71. Modeling elastic fields across irregular boundaries / F. Muir [et al.] // Geophysics. – 1992. – Vol. 57, no.9. – P.1189-1193.

72. Mulder W. A. Temporal dispersion correction for wave-propagation modelling with a series approach / W. Mulder // Geophysiccal Prospecting. – 2023.

73. Energy stable and high-order-accurate finite difference methods on staggered grids / O. O'Reilly, T. Lundquist, E.-M. Dunham, J. Nordstrom // Journal of Computational Physics. – 2017. – Vol. 346. – P.572–589.

74. O'Reilly O. Energy conservative SBP discretizations of the acoustic wave equation in covariant form on staggered curvilinear grids / O. O'Reilly, N.A. Petersson // Journal of Computational Physics. – 2020. – Vol. 411. – P. 109386.

75. Parallel Algorithm for One-Way Wave Equation Based Migration for Seismic Imaging / A. Pleshkevich, D. Vishnevsky [et al.] // percomputing.Springer International Publishing. – 2019. – P.125-135.

76. Reuter U., Liebscher M. Global sensitivity analysis in view of nonlinear structural behavior/ U. Reuter, M. Liebscher // LSDYNA Anwenderforum. – 2008.

77. Ronneberger O. U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation / O. Ronneberger, P. Fischer, T. Brox // Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI). – 2015. – Vol. 9351. – P. 234–241.

78. Rosenblatt F. The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain / F. Rosenblatt // Psychological Review. – 1958. – Vol. 65, no. 6. – P.386–408.

79. Saenger E. H. Modeling the propagation of the elastic waves using a modified finite-difference grid / E.H. Saenger, N. Gold, S.A. Shapiro // Wave Motion. – 2000. – Vol. 31, – P.77–92.

80. Global Sensitivity Analysis: From Theory to Practice / A. Saltelli [et al.] // Mathematics and Computers in Simulation. John Wiley & Sons Limited. – 2008. – Vol. 55, no. 1. – P. 271-280.

81. Saltelli A., Tarantola S. On the relative importance of input factors in mathematical models: safety assessment for nuclear waste disposal /A. Saltelli, S. Tarantola // Journal of American Statistical Association. – 2020. – Vol. 97. – P. 702-709

82. Samarskii A. A. The theory of difference schemes / A. A.Samarskii // CRC Press. – 2001. – Vol. 240.

83. Schoenberg M., Muir F. A calculus for finely layered anisotropic media / M. Schoenberg, F. Muir // Geophysics. – 1989. – Vol. 54, no. 5. – P. 581-589.

84. Sethi H. Mimetic finite-difference coupled-domain solver for anisotropic media / H. Sethi, J. Shragge, I. Tsvankin // Geophysics. – 2021. – Vol. 86, no. 1. – P. T45-T59.

85. Sneider R. The theory of coda wave interferometry / R. Sneider // Pure and Applied Geophysics. –2006. – Vol. 163. – P. 455–473.

86. Sobol' I. M. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates / I. M. Sobol' // Mathematics and Computers in Simulation. – 2001. – Vol. 55, no. 1. – P. 271-280.

87. Estimating the approximation error when fixing unessential factors in global sensitivity analysis / I. M. Sobol' [et al.] // Reliability Engineering & System Safety. – 2007. – Vol. 92, no. 7. –P. 957-960.

88. Sun T. Training Deep Neural Networks with Adaptive Momentum Inspired by the Quadratic Optimization / T. Sun [et al.] // arXiv. – 2021.

89. Symes W. Interface error analysis for numerical wave propagation / W. Symes, T. Vdovina // Computational Geosciences. – 2009. – Vol. 13, no. 3. – P. 363-371.

90. Tofallis C. Measuring Relative Accuracy: A Better Alternative to Mean Absolute Percentage Error / C. Tofallis // SSRN Electronic Journal. – 2015. – Vol. 66. – P.1352-1362.

91. Tromp J. Spectral-element and adjoint methods in seismology / J. Tromp, D. Komatitsch, Q. Liu // Commun. Comput. Phys. – 2008. – Vol. 3, no. 1. – P. 1-32

92. SeismicTransformer: An attention-based deep learning method for the simulation of seismic wavefields / Y.Xiang [et al.] // Computers and Geosciences. – 2024. – Vol.19. – P. 105629.

93. Yang F., Ma J. Deep-learning inversion: a next generation seismic velocity-model building method / F. Yang, J. Ma // Geophysics. – 2019. – Vol. 84. – P. R583–R599.

Schoenberg M., Muir F. A calculus for finely layered anisotropic media / M. Schoenberg, F. Muir // Geophysics. – 1989. – Vol. 54, no. 5. – P. 581-589.

94. Sensitivity Analysis for Neural Networks / D. Yeung [et al.] // Natural Computing Series. Springer Verlag Berlin Heidelberg. – 2010. – Vol.1, no. 6. – P.1577.

95. Yu S. Deep learning for denoising / S. Yu, J. Ma, W. Wang // Geophysics. – 2019. – Vol. 84, no. 6. – P. V333- V350.

96. Zeng T. U-Net-Based Multispectral Image Generation From an RGB Image / T. Zeng, C. Diao, D. Lu // IEEE Access. – 2021. – Vol. 9. – P. 43387 – 43396.

97. Zhang J. Elastic wave propagation in heterogeneous anisotropic media using the lumped finite-element method / J. Zhang, D.J. Verschuur // Geophysics. – 2002. – Vol. 67, no. 2. – P. 625–638.

98. Zhang Y. A Patch based denoising method using deep convolutional neural network for seismic image / Y. Zhang [et al.] // IEEE Access. – 2019. – Vol. 7. – P. 156883 – 156894.

99. Mixed skewness probability modeling and extreme value predicting for physical system input–output based on full bayesian generalized maximumlikelihood estimation / X. Zhang [et al.] // IEEE

Transactions on Instrumentation and Mea- surement. – 2024. – Vol. 73. – P. 1–16.

100. State-monitoring for abnormal vibration of bridge cables focusing on non-stationary responses: From knowledge in phenomena to digital indicators / H. Zhao [et al.] // Measurement. – 2022. – Vol. 205. – P. 112148.

101. Bayesian multiple linear regression and new modeling paradigm for structural deflection robust to data time lag and abnormal signal / H. Zhao [et al.] // IEEE Sensors Journal. – 2023. – Vol. 23, no. 17. – P. 19635–19647.

102. Zhu W. Wave-dynamics simulation using deep neural networks / W. Xhu, Y. Sheng, Y. Sun // Stanford. – 2017.

103. SeismicTransformer: An attention-based deep learning method for the simulation of seismic wavefields / Y. Xiang, Z. Wang, Z. Song, R. Huang, G. Song, F. Min // Computers & Geosciences. – 2024. – Vol. 190. – 105629.

104. Can Higher-Order Finite-Difference Operators Be Applied across a Material Interface? / J. Valovcan [et al.] // Bulletin of the Seismological Society of America. – 2023. – Vol. 113, no. 5. – P. 1924-1937.

105. Numerical study of the interface errors of finite-difference simulations of seismic waves / D. Vishnevsky [et al.] // Geophysics. – 2014. – Vol. 79, no. 4. – P. T219-T232.

106. Virieux J. A review of the spectral, pseudo-spectral, finite-difference and finite-element modelling techniques for geophysical imaging / J. Virieux, H. Calandra, R.-E. Plessix // Geophysical Prospecting. – 2011. – Vol.59, no.5. – P.794–813.

107. Remote Sensing Semantic Segregation for Water Information Extraction: Optimization of Samples via Training Error Performance / R. Wang [et al.] // IEEE Access. – 2019. – Vol. 7. – P. 13383-13395

108. U-FNO—An enhanced Fourier neural operator-based deep-learning model for multiphase flow / G. Wen [et al.] // Advances in Water Resources. – 2022. – Vol. 163. – P. 104180.